

*Alina Kalinowska-Iżykowska*

<https://doi.org/10.26881/pwe.2020.51.09>

ORCID: 0000-0003-4658-7620

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

[alina.kalinowska@uwm.edu.pl](mailto:alina.kalinowska@uwm.edu.pl)

## Konstruktywistyczna dydaktyka w edukacji matematycznej

### Summary

#### Constructivist didactics in mathematics education

Didactics as science is a sub-discipline of paradigmatically pluralistic pedagogy. Its key categories, concepts, and relations between them are subject to changes in meaning. Constructivist mathematical education has to offer tools for a different understanding of educational phenomena. The text shows examples of significant transformations of didactic knowledge. The necessity to reconstruct how mathematical knowledge functions concerning students and teachers also implies requirement for changes in methodological assumptions. It becomes necessary to undertake qualitative research approaches to deepen the understanding of what is happening in lessons.

**Keywords:** didactics of mathematics, constructivism, mathematical education

**Słowa kluczowe:** dydaktyka matematyki, konstruktywizm, edukacja matematyczna

### Wprowadzenie

Dydaktyka, jako subdyscyplina pedagogiki, jest pod względem teoretycznym wewnętrznie zróżnicowana. Mimo to przez długie lata obowiązywała w Polsce dominująca koncepcja, w której najważniejsze pojęcia, jak cele kształcenia, metody, zasady, w ujęciu różnych autorów miały podobne znaczenie. Chociaż w wielu publikacjach bywały nieco modyfikowane, zawsze zachowywały swój ustalony, tradycyjny wydźwięk. W ostatnich latach zaczęto coraz częściej łączyć refleksję dydaktyczną z mocno już zróżnicowanymi systemami edukacyjnymi, co pozwoliło zauważyć, że obecnie nie ma wyznaczonej jednej orientacji w uprawianiu dydaktyki (Bereźnicki 2011: 25). Poszukując ich źródeł, odwoływano się do odmiennych systemów ujmowanych historycznie (choć w wielu aspektach nadal aktualnych) lub do dydaktyk wiązanych z pojedynczym twórcą. Najczęściej przywoływano prace: Jana Amosa Komeńskiego, Jeana-Jacques'a Rousseau, Johanna Heinricha Pestalozziego, Johanna Friedricha Herbarta, Jana Władysława Dawida, Johna Deweya, Sergiusza Hessena, Bogdana Nawroczyńskiego, Celestyna Freineta, Piotra Jakowlewicza Galpierina (zob. Okoń 1998: 433 i nn.). Te odniesienia służyły identyfikowaniu systemów dydaktycznych i pogłębianiu ich analiz. Towarzyszyły temu próby tworze-

nia klasyfikacji i typologii, których celem było wskazywanie różnic i podobieństw, jakie dawały się zauważyć w różnych dydaktycznych konceptualizacjach. Jedną z ciekawszych i bardziej rozbudowanych typologii proponuje Joanna Rutkowiak (1995), przedstawiając poszczególne dydaktyki jako koncepcje mieszczące się w ogólnych i teoretycznych ujęciach pedagogiki. Píše ona o dydaktyce: herbartowskiej, progresywnistycznej, naukowej, humanistycznej, krytycznej i relacyjnej oraz nurcie Nowego Wychowania. Linie demarkacyjne jako podstawy podziału myślenia o edukacji wyznaczają według autorki „pulsujące kategorie”, takie jak: intelektualizm, praktycyzm, praktyczność, przedmiotowość i techniczność, podmiotowość, pytajność, sakralność, kontekstowość, polityczność, uprawniona wielość. Tworzą one punkty orientacyjne na swoistej mapie koncepcji edukacyjnych (Rutkowiak 1995: 24 i nn.).

Część badaczy, m.in. Ireneusz Kawecki, przedstawia systemy kształcenia jako szkoły myślenia o edukacji z perspektywy filozoficznej. Wymienia on najważniejsze filozofie nauczania, lokując je w dwóch obszarach, które rozdziela opozycja tradycjonalizm *versus* współczesność. Do tradycyjnych szkół myślenia o nauczaniu zalicza perenializm i esencjalizm. Natomiast progresywizm, rekonstrukcjonizm i egzystencjalizm to filozofie nauczania przyporządkowane współczesnemu myśleniu o edukacji (Kawecki 2003: 193 i nn.).

Rodzajem przełomu w dotychczasowych sposobach myślenia dydaktycznego jest jego ujęcie zaproponowane przez Dorotę Klus-Stańską (2018). Zgodnie z przyjętą przez nią perspektywą paradygmatyczną odmiennoscą głębokich założeń tworzących fundament teoretyczny różnych dydaktyk powoduje, że: „przedstawiciele różnych paradygmatów nie tyle inaczej oceniają to, co widzą, nie tyle preferują odmienną edukację, ile patrząc na te same wydarzenia w klasie, widzą coś zupełnie innego” (Klus-Stańska 2018: 43). Jednocześnie, co jest właściwe dla nauk społecznych, nowy paradygmat nie wyklucza uprzedniego, a raczej inicjuje równoprawną umowę między uczonymi go uprawiającymi (Klus-Stańska 2009a). Takie podejście nadaje nowe znaczenia myśleniu o dydaktyce. Problematyzuje nadrzędny status jednego paradygmatu i otwiera pulę wyborów teoretyczno-praktycznych. Dopuszcza również eklektyzm dydaktyczny z zastrzeżeniem, że nie może on być powierzchowny, pozbawiony rozumienia podstawowych założeń paradygmatycznych oraz przekraczać granic teoriopoznawczych przesłanek co do rozumienia świata, które są właściwe dla poszczególnych paradygmatów.

Zgodnie z powszechnie przyjmowanym podziałem w metodologii nauk społecznych paradygmaty tworzą dwie epistemologicznie odrębne grupy rozwiązań. Jedna zamyka się w granicach pozytywistycznych, czyli bazuje na założeniu o możliwości obiektywnego poznawania rzeczywistości. Druga – o charakterze niepozytywistycznym – zakłada konstruktywistyczny model poznania, a więc oparty na negocjowanych biograficznie i kulturowo znaczeniach nadawanych rzeczywistości. Ten podział przeniesiony na pole refleksji o edukacji pozwala zidentyfikować odmienne założenia dotyczące uczenia się i wiedzy. W pierwszym wypadku wiedza jest traktowana jako produkt do rozpowszechniania za pomocą nauczycielskiego nauczania, w drugim natomiast jest postrzegana jako proces osadzony w osobistych doświadczeniach i związanych z tym emocjach (Dylak 2009: 40).

## Konstruktywizm w dydaktyce matematyki

Ścisłe powiązanie dydaktyki ogólnej z dydaktykami szczegółowymi pozwala zauważyć, że te ostatnie podlegają również paradygmatycznemu zróżnicowaniu. Ich praktykowanie narażone jest jednak na pewne zniekształcenia, ponieważ osoby je uprawiające nierzadko nie mają świadomości mieszania założeń paradygmatycznych i zestawiania ich w nieuprawniony sposób (Klus-Stańska 2009a: 63). W ten sposób również konstruktywizm, który jest z pewnością nurtem inspirującym dla dydaktyk szczegółowych, nazbyt często „zadomawia się” w nich jedynie jako rodzaj szyldu bez pokrycia. Klus-Stańska wskazuje ewidentne przykłady braku rozumienia założeń paradygmatycznych konstruktywizmu i przejawy hasłowego „uwodzenia” dydaktycznego, wykazując jednocześnie, że nierzadko źródłem tych nieporozumień jest traktowanie konstruktywizmu jedynie jako metody działania nauczyciela, a nie mapy teoretycznej do badania, wyjaśniania i interpretowania zdarzeń lekcyjnych (Klus-Stańska 2009b: 64).

Ryzyko błędnego interpretowania konstruktywizmu jest tym większe, że nie jest on jednolitą koncepcją. Jego wewnętrzne zróżnicowania wynikają przede wszystkim z sięgania do odmiennych założeń filozoficznych oraz sposobów wyjaśniania mechanizmów ludzkiego poznania (Gołębiak 2005: 15–16). Z kolei wielość odmian konstruktywizmu stanowi o jego potencjale teoretycznym i praktycznym oraz dynamice rozwojowej.

Również w edukacji matematycznej konstruktywizm może być rozumiany na różne sposoby, prowadząc do różnego jej rozumienia i praktycznej realizacji. Szczególnie widoczne są zróżnicowane wpływy konstruktywizmu rozwojowego i socjokulturowego, dzięki którym dokonuje się postęp w psychologicznych i pedagogicznych założeniach uczenia się matematyki. Chociaż obecnie coraz częściej jest preferowana społeczna koncepcja Lwa S. Wygotskiego (Filipiak 2015a, b), piagetowskie i postpiagetowskie prace nad poznawczymi aspektami w psychologii uczenia się matematyki pozostają na bardziej zaawansowanym etapie i mają bardzo dobrą teoretyzację, metodologię badawczą i zestaw praktycznych zastosowań (Ernest 1994: 62–72). Niemniej jednak – co podkreśla Paul Ernest – wersje konstruktywizmu społecznego mają szczególnie duże znaczenie dla wielu owocnych kierunków badań nad nabywaniem umiejętności uogólniania i transformacji znaczeń w matematyce szkolnej, uczeniem się przyjętych form retorycznych szkolnego języka matematycznego czy kluczową rolę nauczyciela w odchodzeniu od przekazu wiedzy do wspierania samodzielnego tworzenia wiedzy przez ucznia (Ernest 1994: 62–72).

## Matematyczne kształcenie konstruktywistyczne

Pomimo zróżnicowań koncepcyjnych w obrębie konstruktywizmu wśród badaczy zajmujących się matematyką istnieje zgoda co do tego, że ludzie w oddolny i zindywidualizowany sposób budują swoją wiedzę i odbywa się to poprzez wewnętrznie kierowane procesy umysłowe, w tym refleksję nad (również własnymi) działaniami. Zgodnie z przyjętymi

założeńmi pozwala to jednostce na rekonstruowanie i przeorganizowywanie dotychczasowej wiedzy i konstruowanie nowej. Dlatego też przedstawiciele konstruktywizmu edukacyjnego zazwyczaj zajmują się tym, co wiedzą i jak myślą poszczególni uczniowie, a nie wiedzą publiczną. Są zainteresowani rozumieniem pojęć w odróżnieniu od wiedzy proceduralnej, którą niektórzy autorzy określają jako automatyczne rozwiązywanie (np. znajdowanie pochodnych wielomianów) (Selden, Selden 1996).

Douglas H. Clements i Michael T. Battista opisują konstruktywistycznie rozumiane okoliczności powstawania pojęć matematycznych. Przedstawiają kilka istotnych założeń – w pierwszym przyjmuje się, że pomysły matematyczne są aktywnie tworzone przez dzieci, a nie znalezione lub przyjęte od innych. Drugie mówi o tym, że dzieci tworzą nową wiedzę matematyczną poprzez zastanawianie się nad ich fizycznymi i psychicznymi działaniami. Pomysły są konstruowane lub nabierają znaczenia, gdy dzieci włączają je do istniejących struktur wiedzy. W kolejnym twierdzi się, że nauka matematyki powinna być traktowana jako proces przystosowania się i zorganizowania swojego ilościowego świata, a nie odkrywania dawnych idei narzuconych przez innych. Czwarte założenie odwołuje się do zależności między wiedzą i kulturą. Zakłada się w nim, że matematyczne idee i prawdy są wspólnie ustanowione przez członków kultury. Zgodnie z tym rozumieniem klasa konstruktywistyczna jest postrzegana jako kultura, w którą zaangażowani są uczniowie nie tylko w odkryciach i wynalazkach, ale także w dyskursie społecznym, obejmującym wyjaśnienia, negocjacje, dzielenie się i ocenę. W ostatnim założeniu autorzy przestrzegają przed sytuacją, gdy nauczyciel żąda, aby uczniowie używali gotowego zestawu metody matematycznej. Wówczas bowiem uczniowska działalność sensotwórcza jest poważnie ograniczona, a w efekcie takich doświadczeń przekonania uczniów na temat natury matematyki się zmieniają. W miejsce postrzegania matematyki jako dziedziny rozwijającej samodzielne myślenie pojawia się jej obraz w postaci, często pozbawionych sensu, zestawu procedur do nauki (Clements, Battista 1990: 34).

Proces rozwoju i ewaluacji jakościowej dydaktyk szczegółowych toczy się więc również w wypadku matematyki. W dydaktyce przedmiotowej (podobnie jak w ogólnej) można dostrzec osie zachodzących zmian. Najbardziej znaczące wydają się osie dydaktycznych przesłanek teoriopoznawczych oraz osie filozoficznych założeń o naturze matematyki. Wyznaczane przez nie sposoby rozumienia sytuacji edukacyjnych oraz wiedzy matematycznej stanowią zróżnicowane podejścia teoretyczne. Kontinua opisu wyznaczone przez te osie stanowią jednocześnie przestrzeń napięcia między badaniami naukowymi dotyczącymi teorii dydaktyki matematyki a praktykami kulturowymi. Te ostatnie – jak wskazuje Klus-Stańska – cechują się inercją w akceptowaniu zmian myślenia i działania, wynikających z dokonań naukowych, jednak relacje między dydaktyką naukową i praktyką dydaktyczną są dwustronne. Wiedza z prowadzonych badań naukowych przenika (choć z oporami) do praktyki szkolnej, ale również ta ostatnia wytwarza rzeczywistość edukacyjną dostępną badaniom, przez co wpływa na rodzaj prowadzonych badań oraz ich przebieg i rezultaty (Klus-Stańska 2018: 426–427).

Dydaktyka konstruktywistyczna matematyki należy do najsilniej rozwijanego paradygmatu, szczególnie w teoretycznych założeniach. Jej popularność związana jest z przejrzystością określoną opozycją wobec dydaktyk pozytywistycznych oraz czytelnymi założeniami (Klus-Stańska 2018: 131). Największą intensywność zmian w konstruktywistycznej dydaktyce matematyki można dostrzec w zakresach:

- angażowania w czynności na lekcji jej uczestników (nauczanie i/lub uczenie się);
- związku wiedzy matematycznej z życiem jednostki;
- relacji między uczeniem się matematyki i wychowaniem;
- metodologicznego podejścia w badaniach nad edukacją matematyczną.

Te cztery zakresy stanowią bazę dalszej charakterystyki procesu ewolucji dydaktyki matematyki.

### ***Konstruktywistyczne uczenie się matematyki***

W ostatnich dziesięcioleciach nastąpił zwrot dydaktyczny w zakresie ilości i jakości podejmowanych czynności na lekcjach przez ich uczestników, prowadząc do dydaktyki wyzwania się ucznia. Zmienia się status błędów, chybionych hipotez, nietrafionych poszukiwań, a wiele z tych, które uważamy za niepoprawne, zyskuje na znaczeniu, gdyż stanowi ważny etap rozwijania kompetencji matematycznych. Dydaktyka konstruktywistyczna matematyki koncentruje się na uczeniu się, a nie nauczaniu. Istotne jest, jak uczeń myśli i w jaki sposób rozumie pojęcia matematyczne. Podkreśla się znaczenie ogólnego kontekstu społecznego klasy matematycznej jako złożonej, zorganizowanej formy życia obejmującej: 1) osoby, relacje i role; 2) zasoby materialne; 3) dyskurs szkolnej matematyki, treści i sposoby komunikacji (Ernest 1994). Zmieniają się role nauczyciela i ucznia, ten pierwszy jest usuwany z pierwszoplanowego statusu lekcyjnego na rzecz wspierającego organizatora sytuacji dydaktycznych. Ewolują również wystrój i organizacja przestrzeni klasy. Ustawienie ławek do pracy w małych grupach, swobodny dostęp uczniów do wielu przedmiotów i możliwość manipulowania nimi – wszystko to zmienia wyposażenie, wygląd i zasoby materialne klasy. Opozycyjna w stosunku do pozytywistycznej, odmienność konstruktywistycznej dydaktyki matematyki umożliwia również dialog ich przedstawicieli, osłabiając znaczenie jedyne go słusznego podejścia.

Punktem centralnym zainteresowań dydaktyków matematyki, zainspirowanych konstruktywizmem, stanowi kontakt uczniów z problemami matematycznymi, które zmuszają ich do tworzenia własnych koncepcji, ich prezentowania i uzasadniania. Koncepcje błędne, jako etapowe, nie tylko nie są przeszkodą w powstawaniu rzetelnej wiedzy matematycznej, ale także są niezbędne do jej utworzenia. Jest to ważne założenie, które pojawiło się w konstruktywistycznej koncepcji uczenia się matematyki. Zdaniem Aiso Heinze poznawanie w szkole wyłącznie poprawnych koncepcji matematycznych jest charakterystyczne dla behawiorystycznego podejścia edukacyjnego. Uczeń natomiast musi nauczyć się rozpoznawać, gdzie jest granica między wiedzą błędną a poprawną, aby móc korzystać z wiedzy matematycznej (Heinze 2005). W ten sposób uczniowie rozbudowują osobiste

znaczenia nadawane pojęciom oraz zakresy wiedzy poprawnej i niepoprawnej. Rozwijanie samodzielnej aktywności poznawczej ma na celu budowanie umiejętności uczenia się matematyki. Konstruktywizm przenosi bowiem akcent z procedur automatycznych i zapamiętywania przekazywanych informacji na rozwiązywanie problemów, rozumienie procedur i pojęć i dzięki temu ułatwianie uczenia się matematyki (Selden, Selden 1996).

### *Wiedza matematyczna w życiu jednostki*

Związki dydaktyki matematycznej z życiem są oczywiste. Nie jest jednak tak jasne, jakie one są, z czego wynikają i do czego prowadzą. Dydaktyka obiektywistyczna zakłada konieczność przystosowania ucznia do zastanych warunków społecznych. Relacja nauczyciel–uczeń ma jednostronną dynamikę (Klus-Stańska 2018). Wincenty Okoń łączy nauczanie szkolne z pozaszkolnym funkcjonowaniem jednostki, wskazując na proces stosowania wiedzy naukowej jako treści programowych w praktyce. Jego podstawą ma być nabywanie umiejętności i nawyków, które na następnym etapie życia będą służyć przekształcaniu rzeczywistości (Okoń 1998: 148 i nn.). W tak rozumianym procesie kształcenia wyróżnia się cztery elementy/części: poznawanie świata i jego kultury, przygotowanie do udziału w nim, rozwijanie potrzebnych do tego sprawności i kompetencji oraz kształtowanie postaw o charakterze aksjologicznym. Kształcenie prowadzi do wykształcenia i dopiero ono jest wartością (Okoń 1998: 57, 58) w przeciwieństwie do pośredniego etapu nauczania ucznia w szkole.

Obiektywistycznym celem zastosowania wiedzy jest jej weryfikacja w rzeczywistości szkolnej (Bereźnicki 2011: 197), utrwalenie i zapamiętanie „na przyszłość”. W takim ujęciu aktywność szkolna nie należy do „świata”, w którym uczeń kiedyś będzie. Wiedza pochodzi z zewnątrz (od nauczyciela, z podręcznika) i może być jedynie wykorzystana do aplikacji w działaniu w typowych kontekstach. W edukacji matematycznej nadal bardzo popularny jest zwrot „zastosowanie wiedzy w praktyce”, który oznacza wykorzystanie poznanych algorytmów (wzorów, strategii obliczania itp.) w zadaniach z treścią. Tak praktykowana edukacja matematyczna zaciemnia, a często uniemożliwia dostrzeżenie związku pojęć matematycznych z codziennym życiem, budując uczniowskie przekonania (niestety, społecznie podzielane) o bezużyteczności wiedzy matematycznej w ich przyszłym życiu. Uczniowie często buntują się przeciwko uczeniu się matematyki, nie dostrzegając potrzeby jej używania w przyszłości (szczególnie w tak rozbudowanym zakresie).

Przedstawiciele dydaktyki konstruktywistycznej inaczej postrzegają relacje między kształceniem w zakresie matematyki a życiem jednostki. Behawioralnie budowane działania nawykowe uważane są za niewystarczające, aby rozwijać matematyczne kompetencje umożliwiające pełne uczestnictwo w kulturze. Taki bowiem rodzaj działania w rzeczywistości wyrasta z odmiennych doświadczeń poznawczych. Dydaktyka konstruktywistyczna zakłada sytuowanie umiejętności liczbowych i pomiarów w rzeczywistej zdolności do postrzegania związków przyczyny i skutku, a nie tylko sytuacji przeliczania. Zjawiska matematyczne stają się naturalnym elementem myślenia życiowego,

codziennego. Rozwijana jest intuicja do „wyczuwania” matematyki oraz możliwość odkrywania zjawisk matematycznych w życiu. Edukacja matematyczna w konstruktywistycznym ujęciu koncentruje się na **poznawaniu życia przez matematykę**. Świat matematyki szkolnej przestaje być przygotowaniem do jej wykorzystania w przyszłości – staje się uczeniem się życia obecnie.

Poznawanie matematyki można obecnie również zdefiniować jako proces uzyskiwania zdolności do komunikacji matematycznej nie tylko z innymi, ale także z samym sobą. W wyniku procesu indywidualizacji w centrum uwagi znajduje się osobista kreatywność ucznia (Sfard 1991). Nacisk reprezentantów konstruktywistycznej dydaktyki matematyki na osobiste praktyki poznawcze i indywidualne nadawanie znaczeń pozwala na konstruowanie własnych koncepcji matematycznych, celów i zakresów ich użyteczności, a matematyka staje się wówczas kluczem do rozumienia wielu problemów życiowych.

### *Uczenie się matematyki i wychowanie*

Trzeci obszar zmian myślenia dydaktycznego odnosi się do relacji uczenia się matematyki i wychowania. W potocznej świadomości przyjmuje się, że te dwie kategorie w niewielkim stopniu wiążą się ze sobą. Konstruktywistyczne podejście do edukacji matematycznej zdecydowanie temu przeczy, chociaż w odmienny sposób niż dydaktyka pozytywistyczna. Jej przedstawiciele odwołują się do koncepcji nauczania wychowującego wywodzącego się z koncepcji Johanna Herbart, w której oprócz rozwoju sfery poznawczej należy dbać o sferę osobowości. Uważają również, że kształcenie i wychowanie mają wspólnie przyczynić się do rozwijania całej osobowości człowieka (Okoń 1998: 57, 58), zapobiegając zaniedbaniu którejkolwiek ze sfer funkcjonowania człowieka. W tym ujęciu „kształcenie jest wielostronnym procesem, w trakcie którego obok usystematyzowanego procesu nabywania wiadomości, umiejętności i nawyków, rozwijają się i doskonalą wszystkie cechy osobowości człowieka” (Bereźnicki 2011: 24). Praca wychowawcza ma na celu zadbanie o sferę emocjonalną i wolicjonalną, a kształcenie – poznawczą. Dydaktyczna działalność (kształceniowa) polega na formowaniu u uczniów cech instrumentalnych, czyli zdolności, zainteresowań, umiejętności i postaw (Kupisiewicz 2000: 71). W tym podejściu procesy wychowania i uczenia się matematyki na zajęciach szkolnych są często postrzegane częściowo rozłącznie. Kiedy mówimy o edukacji matematycznej, myślimy raczej o treściach i pojęciach matematycznych, a mniej o wychowaniu. Omawiając z perspektywy obiektywistycznej procesy wychowania, tracimy nieco z pola widzenia zadania matematyczne. Pomimo dostrzegania związków między nauczaniem matematyki i wychowaniem nie nadaje się im charakteru całościowo obejmującego jednostkę.

Matematyczna dydaktyka konstruktywistyczna jest natomiast realizowana przez holistycznie rozumiany rozwój ucznia, angażujący go w całości: w sferze poznawczej, wolicjonalnej i emocjonalnej. Zdaniem Bogusława Śliwerskiego: „całościowe ujmowanie świata kształcenia i wychowywania człowieka bez względu na jego wiek i poziom rozwoju” (2020: 8) jest właśnie przykładem holizmu w pedagogice. Dostrzega on również istotny udział pe-

dagogiki holistycznej w konstruktywistycznych paradygmatach dydaktycznych (Śliwowski 2020: 16). Z tej perspektywy zajmowanie się matematyką w ujęciu konstruktywistycznym jest rodzajem socjalizacji poznawczej i **sposobem wychowywania**. Odmienność konstruktywistycznej dydaktyki polega przede wszystkim na założeniu, że jednostka może być wychowywana przez matematykę. Analiza procesów uczenia się pojęć matematycznych nie może być wyabstrahowana z teorii wychowania, ale przeciwnie, oba obszary są ze sobą holistycznie powiązane. Jego istotę Klus-Stańska dostrzega w „łączeniu zagadnienia przedmiotów i metod nauczania z refleksją nad formowaniem osobowości, charakteru, systemu wartości uczniów, a więc problematyki powszechnie porzucanej dziś przez dydaktyków i traktowanej jako obszar analiz teorii wychowania” (Klus-Stańska 2021 [w druku]).

W tym ujęciu uczenie się matematyki nie jest niezależne od kształtowania osobowości jednostki. Ma wpływ na uznawany przez nią system wartości, kształtuje postawy wobec prawdy i procedur jej poszukiwania oraz wobec twórczości intelektualnej. Sposób poznawania pojęć matematycznych, radzenia sobie z problemami matematycznymi czy forma pracy nad nimi kształtują nie tylko indywidualne rozumienie. Konstruktywistyczne uczenie się matematyki jest obecnie postrzegane jako budowanie wspólnoty. Nauka matematyki jest procesem społecznym, w którym dzieci mogą wrosnąć w życie intelektualne (Bruner 1986). W swoich badaniach Ewa Filipiak (2015c: 126) wskazuje na wyniki pokazujące zaangażowanie emocjonalne i przeżywanie wspólnego doświadczenia badania i odkrywania zagadnień matematycznych. Praktyki kulturowe w tym zakresie rozwijają postawy wobec innych ludzi, rozumienie własnej roli i znaczenia w grupie. Innym przykładem tak pojmowanego holizmu pedagogicznego w matematycznej dydaktyce konstruktywistycznej jest stosunek do błędów. Konstruktywistyczna analiza błędów uczniowskich przeprowadzona przez Mirosława Dąbrowskiego ujawnia nie tylko dwuwymiarowy zakres wiedzy i umiejętności uczniów. Pozwoliła również na odkrywanie kontekstu nauczania szkolnego, w którym budowane są takie postawy uczniów, jak stosunek do nowej wiedzy matematycznej, poczucie mocy sprawczej czy wiedza o własnych możliwościach (Dąbrowski 2013). W konstruktywistycznym podejściu radość odkrywania, tworzenia własnych koncepcji matematycznych, ich uzasadnianie i prowadzenie dyskusji mają wpływ na aspekty osobowościowe uczniów. Pokazano to podczas zajęć w ramach projektu dydaktycznego „Bydgoski bąbel matematyczny”, w którym pozwolono uczniom działać samodzielnie, rozwiązywać problemy matematyczne i prowadzić osobiste rozumowania (Binkowska-Wójcik i in. 2014). Również w badaniach w zakresie rozwiązywania zadań tekstowych uczniów klas początkowych wykazano związki tej działalności nie tylko ze sferą poznawczą, ale również w obszarze emocjonalno-motywacyjnym i społecznym. Uczniowie chętnie rozwiązywali nietypowe zadania, pracowali w małych grupach (oczekując od nauczyciela tej formy pracy również na innych przedmiotach), prowadzili negocjacje społeczne (Kalinowska 2010).

Konstruktywistyczna dydaktyka matematyki, mimo że ewidentnie związana z poznawaniem określonej dziedziny wiedzy, ujmuje uczenie się matematyki holistycznie. W zaangażowaniu ucznia w myślenie matematyczne dostrzega potencjał nie tylko przedmiotowy,



ale także wychowawczy i osobotwórczy. Każdą matematyczną sytuację dydaktyczną wiąże z nadawaniem sensu relacjom społecznym, budowaniem obrazu samego siebie i innych, własnych możliwości przekształcania rzeczywistości. Jest to proces nieustannie rekonstruowanych znaczeń, który powinien być źródłem budowania poczucia mocy i sprawczości ucznia, a w efekcie – jego gotowości do pełnego uczestnictwa w kulturze.

### *Metodologiczne aspekty dydaktyki matematyki*

Dydaktyka matematyki, jak każda dyscyplina, posługuje się określoną metodologią prowadzenia badań i ich interpretacji. Przez długi czas zdominowana była badaniami zorientowanymi na pomiar wyników nauczania, głęboko zakorzeniony w metodologii obiektywistycznej. Przewrót paradygmatyczny, jaki zaszedł w epistemologii, a w konsekwencji także w metodologii nauk społecznych, zmienił tę sytuację. W badaniach nad edukacją matematyczną – oprócz nadal silnie osadzonych tendencji ilościowych – toruje sobie drogę podejście interpretatywne – jakościowe. Nieobecne niegdyś metody, takie jak: etnografia lekcji, analiza treści, krytyczna analiza dyskursu, stają się znakomitym źródłem wiedzy o zjawiskach związanych z nauczaniem i uczeniem się matematyki.

Konstruktywizm przyniósł nie tylko inne myślenie o tym, co dzieje się na lekcji, ale również zmienił strategię badania tych zjawisk. Do rozpoznawania wprowadzono „miękkie” narzędzia pogłębiające możliwość rozumienia. W konstruktywistycznych badaniach matematycznych dotyczących wiedzy uczniów odchodzi się od analizy bezpośrednio obserwowalnych zjawisk na rzecz rozumienia tego, co dzieje się w umysłach uczniów (Selden, Selden 1996). Sposoby radzenia sobie z problemami matematycznymi pozwalają badaczom wnioskować o znaczeniach nadawanych pojęciom matematycznym (Dąbrowski 2009; Kalinowska 2009). Pojawia się pytanie, czy śledzenie sposobów myślenia i rozpoznawanie strategii postawiło wyzwanie przed dydaktykiem, który musi szerzej rozumieć pojęcia matematyczne.

Dorota Klus-Stańska i Marzenna Nowicka pokazały uczenie się matematyki jako zorientowane na proces lub na wynik. To pierwsze wymaga umożliwienia uczniom, którzy jeszcze nie poznali drogi postępowania, szukania własnych strategii radzenia sobie z problemem matematycznym. W podejściu zorientowanym na wynik uczniowie są kierowani przez nauczyciela, a pojawiająca się czasem praca samodzielna nie ma cech samodzielności poznawczej (Klus-Stańska, Nowicka 2014: 132 i nn.). Stosowanie innych metod sprzęga się z innym rozumieniem sytuacji edukacyjnych. W tradycyjnej dydaktyce błąd stanowi narzędzie pomiaru poprawności wiedzy matematycznej. Konstruktywistyczne podejście do błędu nadaje mu zdecydowanie inną jakość metodologiczną. Istotne jest badanie błędów, a nie ich identyfikacja. Dąbrowski (2013) rekonstruuje błędy uczniów jako strategie myślenia.

Do badań nad edukacją matematyczną potrzebne jest solidne zrozumienie matematyki na poziomie (i poza nim), na którym pracują obserwowani uczniowie (Selden 2002: 3). Pojęcia i definicje matematyczne są skomplikowane znaczeniowo i czułe na rekonstrukcje poznawcze. Badania interpretatywne wiedzy matematycznej i procesów jej konstruowa-

nia w umyśle odnoszą się również do wcześniej wspomnianej wiedzy o błędach. Ich analiza jest doskonałym sposobem odkrywania strategii myślenia uczniów oraz tworzonych przez uczniów koncepcji matematycznych (Gedik Altun, Konyalioglu 2019: 467–476).

Dydaktyka konstruktywistyczna oferuje również zmiany w myśleniu o nauczycielu matematyki, jego kompetencjach i wiedzy. W ostatnich latach coraz bardziej docenia się znaczenie wiedzy pedagogicznej w zakresie różnych przedmiotów. Uznaje się, że stanowi ona zasadniczy pomost między znajomością przedmiotu (tu matematyki) a jego nauczaniem. Jest to bowiem wiedza, która określa, w jaki sposób pojęcia matematyczne są reprezentowane w umysłach uczniów z ich doświadczeń uczenia się. Ze względu na swoje w dużej mierze praktyczne pochodzenie znajomość przedmiotu nauczania określa się jako praktyczną wiedzę (Ernest 1994: 17). Zauważono również, że badania nauczycieli matematyki powinny się odbywać w trakcie prowadzenia zajęć, z prawdziwymi uczniami, materiałami i treściami (Hill i in. 2007: 150 i nn.).

Badania nad strukturą wiedzy nauczyciela matematyki są już od ponad 30 lat w centrum zainteresowań pedagogiki (Shulman 1986). Możliwość rozpoznania i kształcenia u nauczycieli umiejętności konstruowania szerokiego rozumienia pojęć matematycznych zmienia podejście metodologiczne. Jakościowa interpretacja zdarzeń lekcyjnych, zachowań nauczycieli i uczniów jest obecnie istotnym narzędziem poznawania kompetencji dydaktycznych i merytorycznych nauczycieli matematyki.

Podjęcie konstruktywistyczne pozwala nie tylko w perspektywie badawczej, ale także nauczycielskiej na dostrzeganie zjawisk dydaktycznych, w których uczeń samodzielnie buduje swoją wiedzę, a także na rozpoznawanie kontekstu jej tworzenia. Rozpoznawanie uczniowskich strategii myślenia pozwala, co oczywiste, na identyfikowanie rodzajów błędów. Znacząco istotniejsze jest, że staje się ono narzędziem do rozpoznawania, w jaki sposób uczniowie poznawali zagadnienia matematyczne, jakie zadania głównie rozwiązywali, jaki był zakres akceptacji ich samodzielności poznawczej i popełnianych błędów. Nauczyciel ma możliwość diagnozowania wiedzy matematycznej ucznia nie tylko w sposób zero-jedynkowy. Konstruktywistyczne rozumienie edukacji matematycznej otwiera nauczyciela na błędy uczniowskie postrzegane jako niezwykle cenny materiał do diagnozy uczniowskiego rozumienia matematyki, wskazywania źródeł niepoprawnych strategii i w efekcie skuteczniejszej pomocy.

## Podsumowanie

Konstruktywistyczna dydaktyka matematyki ma do zaoferowania kulturę edukacji odmienną od ujęcia obiektywistycznego. Jej korzenie tkwią w progresywnym, co ma ogromne znaczenie nie tylko dla teorii dydaktyki, ale również dla świadomości nauczyciela. Uczenie się matematyki zgodnie z podstawowymi założeniami tego ujęcia paradygmatycznego (Klus-Stańska 2018: 138–139) buduje kompetencje do samodzielnego uczenia się, pełnego uczestnictwa w kulturze zarówno dzięki użytkowości osobiście

konstruowanej wiedzy matematycznej, jak i kształtowanym przez matematykę wartościami. Takie podejście niesie ze sobą odmienne myślenie o roli edukacji matematycznej w życiu jednostki. Obejmuje bardzo szerokie zmiany w rozumieniu zjawisk edukacyjnych i ich następstw w rozwoju uczniów oraz działaniu nauczyciela, który ma szansę zrozumieć, że: „wiedza dydaktyczna (...) staje się niezbędna, by zrozumieć własne głęboko ukryte założenia i być zdolnym do krytycznej refleksji nad nimi, a czasem do zmiany swoich uprzednich wyborów” (Klus-Stańska 2018: 8). W tym kontekście istotne jest, że wiedza o konstruktywizmie może zmienić rozumienie przez nauczyciela tego, co dzieje się w czasie lekcji, i tego, czym w istocie jest jego nauczanie.

## Literatura

- Bereźnicki F. (2011), *Podstawy dydaktyki*. Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”.
- Binkowska-Wójcik W., Boron I., Brzyska S. i in. (2014), *Bydgoski bąbel matematyczny. O wprowadzaniu zmian w nauczaniu matematyki w klasach I–III*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.
- Bruner J. (1986), *Actual, Minds Possible Worlds*. Cambridge, Harvard University Press.
- Clements D.H., Battista M.T. (1990), *Constructivist Learning and Teaching*. „The Arithmetic Teacher”, 38(1). [https://www.academia.edu/10194951/Constructivist\\_learning\\_and\\_teaching](https://www.academia.edu/10194951/Constructivist_learning_and_teaching), 15.09.2020.
- Dąbrowski M. (2009), *Wykonywanie obliczeń. Rozwiązywanie zadań tekstowych*. W: M. Dąbrowski (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa, CKE.
- Dąbrowski M. (2013), *(Za) trudne, bo trzeba myśleć? O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.
- Dylak S. (2009), *Koniec „nauczania” czy nowy paradygmat dydaktyczny*. W: L. Hurlo, D. Klus-Stańska, M. Łojko, *Paradygmaty współczesnej dydaktyki*. Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”.
- Ernest P. (1994), *Social constructivism and the psychology of mathematics education*. W: P. Ernest (ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education*. London, Falmer Press.
- Filipiak E. (2015a), *Możliwości rozwijania myślenia teoretycznego u dzieci w wieku wczesnoszkolnym. Podejście Lwa S. Wygotskiego*. „Studia Pedagogiczne”, 68.
- Filipiak E. (red.) (2015b), *Nauczanie rozwijające we wczesnej edukacji według Lwa S. Wygotskiego. Od teorii do zmiany w praktyce*. Bydgoszcz, Agencja Reklamowo-Wydawnicza ArtStudio klonowski.eu.
- Filipiak E. (red.) (2015c), *Model nauczania rozwijającego we wczesnej edukacji według Lwa S. Wygotskiego*. Bydgoszcz, Agencja Reklamowo-Wydawnicza ArtStudio klonowski.eu.
- Gedik Altun S.D., Konyalioglu A.C. (2019), *The Influence of Mistake-Handling Activities on Mathematics Education: An Example of Definitions*. „European Journal of Educational Research”, 8(2), <https://www.eu-jer.com/the-influence-of-mistake-handling-activities-on-mathematics-education-an-example-of-definitions516>, 30.09.2020.
- Gołębnik B.D. (2005), *Konstruktywizm – moda, „nowa religia” czy tylko/aż interesująca perspektywa w myśleniu nauczycieli*. „Problemy Wczesnej Edukacji”, 1.

- Heinze A. (2005), *Mistake-Handling Activities in German Mathematics Classroom*. W: H.L. Chick, J.L. Vincent (eds.), *Proceedings of the 29<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*. Melbourne, Melbourne University.
- Hill H.C., Sleep L., Lewis J.M., Ball D.L. (2007), *Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts*. W: F. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NCTM/Information Age Publishing.
- Kalinowska A. (2009), *Dostrzeganie i wykorzystywanie prawidłowości*. W: M. Dąbrowski (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa, CKE.
- Kalinowska A. (2010), *Matematyczne zadania problemowe w klasach początkowych – między wiedzą osobistą a jej formalizacją*. Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”.
- Kawecki I. (2003), *Wprowadzenie do wiedzy o szkole i nauczaniu*. Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”.
- Klus-Stańska D. (2009a), *Paradygmaty współczesnej dydaktyki – poszukiwanie kwiatu paproci czy szansa na tożsamość teoretyczno-metodologiczną*. W: L. Hurlo, D. Klus-Stańska, M. Łojko (red.), *Paradygmaty współczesnej dydaktyki*. Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”.
- Klus-Stańska D. (2009b), *Polska rzeczywistość dydaktyczna – paradygmatyczny taniec św. Wita*. W: L. Hurlo, D. Klus-Stańska, M. Łojko, *Paradygmaty współczesnej dydaktyki*. Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”.
- Klus-Stańska D. (2018), *Paradygmaty matematyki. Myśleć teorii o praktyce*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Klus-Stańska D. (2021), *Dydaktyka ogólna: dobre tradycje, stare pułapki, nowe perspektywy*. „Studia z Teorii Wychowania” [w druku].
- Klus-Stańska D., Nowicka M. (2014), *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Gdańsk, Harmonia Universalis.
- Kupisiewicz Cz. (2000), *Dydaktyka ogólna*. Warszawa, Oficyna Wydawnicza „Graf Punkt”.
- Okoń W. (1998), *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*. Warszawa, Wydawnictwo Akademickie „Żak”.
- Rutkowiak J. (1995), *„Pulsujące kategorie” jako wyznaczniki mapy odmiany myślenia o edukacji*. W: eadem (red.), *Odmiany myślenia o edukacji*. Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”.
- Selden J., Selden A. (1996), *Constructivism in Mathematics Education – What Does it Mean?* Conference: Research Conference in Collegiate Mathematics Education (1<sup>st</sup> Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education), Michigan. [https://www.researchgate.net/publication/269168301\\_Constructivism\\_in\\_Mathematics\\_Education\\_--\\_What\\_Does\\_it\\_Mean](https://www.researchgate.net/publication/269168301_Constructivism_in_Mathematics_Education_--_What_Does_it_Mean), 21.09.2020.
- Selden A. (2002), *Two research traditions separated by a common subject: mathematics and mathematics education*. Tennessee Technological University Cookeville, TN 38505. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED518602.pdf>, 3.12.2020.
- Sfard A. (1991), *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. „Educational Studies in Mathematics”, 22.
- Sfard A. (2006), *Participationist discourse on mathematics learning*. *New Mathematics Education Research and Practice*. Rotterdam, Sense Publishers. [https://www.researchgate.net/publication/303148993\\_Participationist\\_discourse\\_on\\_mathematics\\_learning](https://www.researchgate.net/publication/303148993_Participationist_discourse_on_mathematics_learning), 18.09.2020.
- Shulman L.S. (1986), *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. „Educational Researcher”, 15(2).
- Śliwerski B. (2020), *Pedagogika holistyczna*. „Problemy Wczesnej Edukacji”, 2(49).