PROBLEMY WCZESNEJ EDUKACJI / ISSUES IN EARLY EDUCATION ISSN 1734-1582
1 (52) / 2021 ISSN 2451-2230 (online)

Alina Kalinowska-Iżykowska
ORCID: 0000-0003-4658-7620
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
alina.kalinowska@uwm.edu.pl

https://doi.org/10.26881/pwe.2021.52.12

W poszukiwaniu rozumowania matematycznego najmłodszych uczniów – doniesienie z badań wdrożeniowych

Summary

In search of the youngest students' mathematical reasoning – a research report

Mathematical reasoning is a crucial competence for the construction of useful knowledge. The text presents selected results of the study of students of the third grade of an elementary school in the field of text task solving. The conducted educational experiment showed the potential of solving non-standard tasks for developing the reasoning of mathematically weaker students. Contact with tasks that require independent mathematizing allowed to reduce the number of students with the lowest results in the post test. The ways of understanding the role of drawing in exploring mathematical relations described in the task were analysed.

Keywords: mathematical reasoning, text task, iconic representation

Słowa kluczowe: rozumowanie matematyczne, zadanie tekstowe, reprezentacja ikoniczna

Wstęp

Nauczanie matematyki staje się ważnym zagadnieniem w wielu krajach (Raport EACEA 2011). Dobra szkoła jest coraz częściej utożsamiana z rzetelnym nauczaniem, dostrzega się także coraz większe znaczenie matematycznej edukacji wczesnoszkolnej (Dąbrowski 2008; Klus-Stańska, Nowicka 2014; Semadeni i in. 2015). Równocześnie edukacji matematycznej w klasach najmłodszych nierzadko są przypisywane infantylne treści czy naiwne myślenie o możliwościach intelektualnych dziecka (Dąbrowski 2013; Klus-Stańska, Nowicka 2014). Niepokojącym zjawiskiem jest również malejąca liczba dzieci ujawniających uzdolnienia matematyczne już po kilku miesiącach nauki w szkole (Semadeni i in. 2015).

Sposoby radzenia sobie z zadaniami typowymi i problemowymi odsłaniają poziom myślenia matematycznego uczniów oraz znaczenia, jakie nadają oni pojęciom matematycznym. Konstruowane przez uczniów strategie wynikają z budowania wiedzy twórczej/odtwórczej w ścisłym związku z matematycznymi koncepcjami edukacyjnymi nauczycieli i autorów podręczników. Zarówno poprawne, jak i błędne procedury rozwiązywania przez uczniów matematycznych zadań ukazują określone mechanizmy poznawania pojęć matematycznych w szkole. Badanie strategii rozwiązywania zadań ujawnia, co jest oczywiste, sposób rozumienia danego zagadnienia matematycznego, którego to zadanie dotyczy, ale również rodzaje znaczeń zakotwiczonych wcześniej i niewykorzystywanych bezpośrednio i świadomie przez rozwiązującego.

Od pewnego czasu intensywnie prowadzone są badania nad efektami nauczania matematyki w szkole. Spektrum zagadnień jest szerokie, dotyczy przede wszystkim zjawiska skuteczności. Szuka się wskaźników podwyższających efekty nauczania (Townsend, Bates (eds.) 2007; Hattie 2009; Dolata i in. 2014) czy ocenia wyniki egzaminów zewnętrznych. Przytaczane są niepokojące dane w zakresie szkolnego uczenia się matematyki – specyfika matematycznych umiejętności polskich uczniów polega na słabych efektach w zakresie rozwiązywania problemów i niskiej liczbie uczniów z najwyższymi wynikami (Konarzewski 2012).

Badanie nauczania matematyki częściej dotyczy skuteczności, a rzadziej matematycznych koncepcji uczniów, czyli ich sposobów rozumowania. Zofia Krygowska definiuje „wnioskowanie empiryczne” jako oznaczenie sytuacji edukacyjnej dwojakiego rodzaju. W pierwszej sytuacji uczeń matematyzuje (formułuje hipotezę), obserwując w modelu lub na rysunku zależności przestrzenne lub ilościowe. W drugiej uczeń dostrzega zależność w wykonywanych przez siebie próbach i formułuje hipotezę matematyczną (Krygowska 1979: 137). W odniesieniu do młodszych uczniów rozpoznanie tego rodzaju wiedzy matematycznej jest niepełne i niepogłębione. W Polsce w latach 2006–2011 prowadzono badania, w których m.in. identyfikowano sposoby rozwiązywania zadań matematycznych (Dąbrowski 2013), ale badania te nie były powtarzane. Trudności są związane z niedostatkiem narzędzi pozwalających rozpoznać strategie matematyczne uczniów oraz z małą liczbą pogłębionych badań w tym zakresie – w ten sposób zjawisko szkolnej edukacji matematycznej staje się przestrzenią z poznawczymi lukami. Dotyczą one możliwości podejmowania przez uczniów matematycznego myślenia twórczego (Klus-Stańska, Kalinowska 2004) czy podejmowania samodzielności badawczej (Kalinowska 2010b). Wiedza naukowa na ten temat wciąż jest niewystarczająca, a przyczyny niedostatków nauczania matematyki na etapie wczesnej edukacji nadal stanowią jedną z białych plam tego rodzaju. Badania przestawione w niniejszym tekście są próbą pokazania, że uczniowie w klasach początkowych potrafią samodzielnie zajmować się zadaniami wymagającymi twórczości matematycznej w zakresie tworzenia własnych strategii postępowania i szukania modelu rozwiązania.

Przedmiot i cel badań

Przedmiot badań stanowiły kompetencje matematyczne uczniów klas trzecich szkoły podstawowej w zakresie radzenia sobie z tekstowymi zadaniami, w szczególności nietypowymi. Celem badania było ustalenie, czy umożliwienie uczniom pracy z zadaniami nietypowymi, w odmiennych niż dotychczas warunkach, będzie się wiązało z lepszymi wynikami rozwiązywania zadań matematycznych.

Metoda

Założenia i przebieg badań

Prezentowane badania stanowią element projektu edukacyjnego, który przygotowano i przeprowadzono w ramach współpracy trzech instytucji: Centrum Edukacji Nauczycieli w Gdańsku, Uniwersytetu Gdańskiego oraz Uniwersytet Warmińsko-Mazurskiego. Z ramienia Uniwersytetu Gdańskiego koordynatorem prowadzonych prac badawczych i jednocześnie ekspertem akademickim była prof. dr hab. Dorota Klus-Stańska. Badania miały charakter eksperymentu naturalnego (Rubacha 2008: 346), z uwzględnieniem pomiaru pre i post. Podstawę obu pomiarów stanowił wynik punktowy uzyskiwany przez uczniów w testach obejmujących typowe i nietypowe tekstowe zadania matematyczne. Eksperyment trwał pięć miesięcy (od lutego do czerwca 2017 r.), w trakcie których uczniowie z klas kontrolnych realizowali lekcje matematyki zgodnie z programem, natomiast uczniowie z klas eksperymentalnych przez jedną godzinę lekcyjną matematyki w tygodniu w ramach przewidzianych godzin zajęć mieli możliwość samodzielnej pracy z zadaniami nietypowymi w oparciu o przygotowany autorski plan działań przekazany nauczycielom tych klas. Należy nadmienić, że zdaniem Krzysztofa Rubachy „naturalność środowiska eksperymentu" sprawdza się jako metoda w badaniach edukacyjnych (Rubacha 2008: 347), co stanowi uzasadnienie wykorzystania tej właśnie metody.

Realizacja badań była poprzedzona ośmiogodzinnymi warsztatami dla nauczycieli klas eksperymentalnych, które odbyły się w listopadzie 2016 r. Warsztaty miały na celu przygotowanie nauczycieli do poprowadzenia lekcji zgodnie ze wspomnianym planem, który powstał w oparciu o rezultaty moich wcześniejszych badań (Kalinowska 2010a) i w ramach przedstawionego badania został poddany weryfikacji. Na każdą lekcję opracowałam, na podstawie wyników swoich badań (Kalinowska 2010a), 24 zestawy zadań nietypowych dla uczniów, które nauczyciele mieli wykorzystywać podczas eksperymentalnych lekcji. Wszystkie zestawy zawierały zadania problemowe (nietypowe), czyli takie, których uczeń nie potrafi rozwiązać za pomocą posiadanej już wiedzy algorytmicznej, musi wytworzyć nową wiedzę (Kalinowska 2010a: 26) i samodzielnie stworzyć model rozwiązania. Uwzględnione w zestawie zadania miały stymulować uczniów do dyskutowania, uzasadniania i odkrywania prawidłowości matematycznych. Rolą nauczyciela w trakcie lekcji miało być organizowanie pracy w małych grupach, zachęcanie uczniów do podejmowania prób rozwiązania zadań według własnych strategii, akceptowanie błędnych hipotez uczniów i umożliwianie im ich weryfikowania.

Osoby badane

Uczestnikami badań byli uczniowie klas III szkoły podstawowej (pretest $N = 975$, posttest $N = 922$). Łącznie w badaniu wzięło udział 50 zespołów klasowych (26 klas eksperymentalnych i 24 klasy kontrolne) ze szkół w województwie pomorskim. Podział na klasy eksperymentalne i kontrolne nastąpił na podstawie zgłoszenia klas przez nauczycieli do poszczególnych typów. Informacje o projekcie zostały wysłane do szkół podstawowych i nauczyciele mogli podjąć współpracę w jednym z dwóch obszarów lub nie podejmować jej wcale.

Narzędzia badawcze

W ramach pretestu i posttestu wykorzystano testy, opracowane w oparciu o dotychczasowe badania własne (Kalinowska 2010a), polegające na rozwiązaniu 10 zadań typowych i 10 zadań nietypowych w każdym z nich. Za wykonanie każdego zadania uczeń mógł otrzymać 0 lub 1 punkt. Poprawność zadania tekstowego była określana prawidłową strategią rozwiązania i błąd rachunkowy nie był wówczas brany pod uwagę. Dodatkowo opracowałam szczegółowy klucz rozwiązań, w którym umieszczono 6 możliwości rozwiązań oznaczonych kodami (1–6). Kody 1 i 2 oznaczały poprawne rozwiązanie, a kody 3, 4, 5 – niepoprawne. Kod 6 oznaczał pominięcie zadania. Należy dodać, że zadanie 12 w preteście nie zostało uwzględnione w analizach ze względu na wystąpienie nieczytelnego wydruku na niektórych arkuszach. Zatem w preteście maksymalna liczba punktów do zdobycia wyniosła 19 (9 za zadania typowe i 10 za zadania nietypowe), natomiast w postteście 20 punktów (po 10 za zadania typowe i nietypowe). Po przeprowadzeniu pretestu pakiety zadań zostały przekazane nauczycielom do użycia w trakcie lekcji eksperymentalnych.

Metody analizy danych

Uzyskane w ramach badania dane zostały poddane analizie statystycznej z wykorzystaniem oprogramowania SPSS. Prezentowane opracowanie wyników uwzględnia wybrane analizy dotyczące porównań średnich wyników z użyciem testu U Manna-Whitneya oraz testu chi kwadrat w celu porównania proporcji w grupach klas eksperymentalnych i kontrolnych. Pod uwagę brano liczby uczniów o najniższych i najwyższych wynikach oraz w zakresie pominięć zadań, z uwzględnieniem ich charakteru typowego i nietypowego.

Rozwiązywanie zadań tekstowych – wybrane wyniki

Przedstawione w tekście fragmenty wyników badań są próbą spojrzenia na sposoby radzenia sobie uczniów na poziomie wczesnoszkolnym z zadaniami matematycznymi przez identyfikowanie mechanizmów poznawczych w procesie rozumowania matematycznego. W artykule zaprezentowano jedynie wycinkowe wyniki badań (w przygotowaniu jest znacznie szerszy zakres analizy).

Podstawową analizą ilościową, którą należy przedstawić, jest porównanie średnich wyników punktowych klas kontrolnych i eksperymentalnych na etapie pretestu i posttestu. Ze względu na brak rozkładu normalnego wyników został użyty nieparametryczny test U Manna-Whitneya, natomiast w celu ułatwienia interpretacji w tabeli 1 przedstawiono dane w postaci średniej arytmetycznej oraz odchylenia standardowego.

Tabela 1. Punktowe wyniki średnich arytmetycznych badanych grup w zakresie zadań typowych i nietypowych

Wyniki	**Klasy kontrolne**	**Klasy eksperymentalne**	***U***	***Z***	***p***
	***M* (*SD*)**	***M* (*SD*)**			
pretest					
wynik ogólny	9,12 (4,48)	9,18 (4,54)	118 552,5	–0,06	0,954
zadania typowe	5,83 (2,51)	5,87 (2,47)	117 893,0	–0,21	0,835
zadania nietypowe	3,29 (2,37)	3,31 (2,48)	118 041,5	0,17	0,862
n	494	481			
posttest					
wynik ogólny	10,38 (4,50)	10,79 (4,78)	100 004,0	–1,55	0,122
zadania typowe	6,69 (2,68)	6,50 (2,80)	102 789,0	0,86	0,391
zadania nietypowe	**3,69 (2,27)**	**4,29 (2,36)**	**90 597,5**	**–3,87**	**< 0,001**
n	464	458			

U – test U Manna-Whitneya; Z – odchylenie normalne

Źródło: opracowanie własne.

Efektem podjętych badań było uzyskanie wzrostu umiejętności uczniów z klas eksperymentalnych w zakresie rozwiązywania zadań nietypowych. Uczniowie z klas eksperymentalnych uzyskali wyniki w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań nietypowych statystycznie wyższe niż uczniowie klas kontrolnych z prawdopodobieństwem mniejszym niż 0,001. Nie ma natomiast istotnych różnic w zakresie rozwiązywania zadań typowych. Można więc przypuszczać, że dzieci z klas eksperymentalnych rozwinęły się w zakresie rozumowania, a nie w obliczeniowym. Przebieg pracy nad zadaniami nietypowymi w klasach eksperymentalnych nie był monitorowany, co zmusza do dużej ostrożności w interpretacji uzyskanych wyników. Odmienne sposoby zajmowania się zadaniami nietypowymi mogą się bowiem przyczyniać do powstawania różnej wiedzy matematycznej. Szukanie przez ucznia własnych rozwiązań może stymulować do dokonywania odkryć i uczenia się rozwiązywania problemów, przejawiającego się w umiejętności przekształcania zadania w taką formę zagadki, z którą umie się postępować (Bruner 1978: 676). Ułatwia również rozwiązywanie kolejnych problemów (Schoenfeld 1992: 334–370) dzięki tworzeniu wiedzy systemowej z powiązanymi ze sobą treściami. Natomiast praca „równym frontem" z tłumaczeniem zadania przez nauczyciela osłabia usamodzielnianie poznawcze ucznia, często skutkuje jedynie śladowymi fragmentami działań zapisanymi w pamięci typu: „coś się tam mnożyło, a potem odejmowało". Niedostatek logicznego powiązania czynności znacząco ogranicza wykorzystanie tej wiedzy. Jednym z najważniejszych kryteriów nauczania matematyki w szkole powinna być bowiem użyteczność, czyli umiejętność jej wykorzystania (Krygowska 1979: 6), co umożliwia znajomość treści matematycznych, rozumianą przede wszystkim jako sposób ich funkcjonowania w umyśle (Klus-Stańska 2000: 104). Istotnie wyższe kompetencje w rozwiązywaniu zadań nietypowych w klasach eksperymentalnych wskazują na większe możliwości uczniów w tym zakresie, niż często się przypuszcza. Akceptacja uczniowskich samodzielnych prób tworzenia własnych strategii i stawiania błędnych hipotez jest bowiem nadal słabo reprezentowana wśród nauczycieli wczesnej edukacji (por. Dąbrowski 2009b: 127), można więc dopuścić możliwość pojawiania się ograniczeń w samodzielnych próbach uczniów jako jednej ze zmiennych zakłócających przebieg eksperymentu. Pomimo że interpretacja każdego z wyników musi być nacechowana ostrożnością, wyniki podjętych badań są bardzo interesujące.

W badaniach wykazano również inne obiecujące rezultaty związane z liczbą uczniów uzyskujących najmniej i najwięcej punktów. Jest to istotna zmienna brana pod uwagę w testach i egzaminach zewnętrznych, w których uczestniczą polscy uczniowie, i ukazuje ważną statystykę określającą progi ich osiągnięć. W prezentowanych tu badaniach również sprawdzono liczbę uczniów z największą i najmniejszą liczbą punktów za zadania typowe i nietypowe (tab. 2).

Tabela 2. Liczby uczniów w grupach o największej i najmniejszej liczbie punktów w zakresie zadań typowych

Liczba uczniów z liczbą punktów	**Klasy kontrolne**		**Klasy eksperymentalne**	
	pretest	**posttest**	**pretest**	**posttest**
Najmniejszą (0, 1, 2)	70	48	64	54
Największą (8, 9, 10)	165	216	163	213

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań typowych nie pokazują zróżnicowania w obu grupach klas. W klasach eksperymentalnych i kontrolnych w ciągu 5 miesięcy zmniejszyła się liczba uczniów najsłabszych, co może wynikać z naturalnego dla procesu rozwojowego wzrostu szkolnych umiejętności matematycznych. Wyniki uzyskane w postteście są wyrównane w obu grupach klas, co wskazuje również na to, że zmniejszony czas standardowych lekcji w klasach eksperymentalnych nie wpłynął negatywnie na poziom rozwiązywania zadań typowych (tab. 3).

Tabela 3. Liczby uczniów w grupach o największej i najmniejszej liczbie punktów w zakresie zadań nietypowych

Liczba uczniów z liczbą punktów	**Klasy kontrolne**		**Klasy eksperymentalne**	
	pretest	**posttest**	**pretest**	**posttest**
Najmniejszą (0, 1, 2)	213	163	214	119
Największą (8, 9, 10)	26	26	33	51

Źródło: opracowanie własne.

Różnice są bardziej widoczne w zakresie umiejętności rozwiązywania zadań nietypowych. W obu grupach klas zmniejszyła się liczba uczniów o najniższych wynikach, jednak w klasach eksperymentalnych ta różnica jest większa. Eksperyment pokazał również przewagę klas eksperymentalnych w zakresie liczby uczniów z najwyższymi wynikami w postteście. W grupie klas kontrolnych nie widać zmian w tym zakresie. W tabeli 4 przedstawiono zależności statystyczne w zakresie tych zmian.

Tabela 4. Zestawienie danych dotyczących liczby uczniów o najniższych i najwyższych wynikach w zakresie zadań typowych i nietypowych z podziałem na typy klas i etap badania

Liczba uczniów z liczbą punktów	**Klasy kontrolne**	**Klasy eksperymentalne**	X^2	*df*	*p*
pretest – zadania typowe					
najmniejszą (0, 1, 2)	70	64	0,14	1	0,71
największą (8, 9, 10)	165	163			
posttest – zadania typowe					
najmniejszą (0, 1, 2)	48	54	0,36	1	0,55
największą (8, 9, 10)	216	213			
pretest – zadania nietypowe					
najmniejszą (0, 1, 2)	213	214	0,70	1	0,40
największą (8, 9, 10)	26	33			
posttest – zadania nietypowe					
najmniejszą (0, 1, 2)	163	119	**14,02**	**1**	**< 0,001**
największą (8, 9, 10)	26	51			

Źródło: opracowanie własne.

Istotnie statystycznie zmniejszyła się liczba uczniów najsłabszych i jednocześnie zwiększyła grupa najlepszych dzieci w rozwiązywaniu zadań nietypowych. Te wyniki mogą wskazywać, że zajmowanie się zadaniami nietypowymi nie tylko rozwija uczniów zdolniejszych, ale wspiera rozwój samodzielności poznawczej dzieci słabszych matematycznie, co jest bardzo ważnym wnioskiem z badań. Zastosowany w eksperymencie zestaw zadań nietypowych okazał się skuteczny w rozwijaniu myślenia matematycznego uczniów, z którymi na ogół nie wiąże się takich efektów. W praktyce edukacyjnej w klasach początkowych bowiem w stosunku tych uczniów jest widoczna duża ostrożność nauczycieli w udostępnianiu na lekcjach zadań nietypowych. Powszechnie uważa się je za trudniejsze, a więc przeznaczone jedynie dla uczniów „szóstkowych", którzy wykazują się wysokim poziomem myślenia matematycznego. Nauczycielom często towarzyszy obawa o doświadczanie poczucia porażki przez słabszego ucznia i brak przekonania co do jego możliwości. Referowane tu efekty świadczą jednak o tym, że zaufanie do kompetencji ucznia znacząco wpływa na jego wyniki. W wynikach wielu badań wskazuje się również, że dzieci z trudnościami w uczeniu się matematyki (Syndrom Nieadekwatnych Osiągnięć Szkolnych) osiągają w przyszłości sukcesy nie na miarę swoich wysokich możliwości, ale na miarę ocen szkolnych (por. Dyrda 2012: 205). Barry J. Zimmerman i Anastasia Kitsantas (1997) twierdzą, że dostrzeganie przyczyny błędnego rozwiązania w użyciu złej strategii i nastawienie na szukanie nowych rozwiązań nie osłabia motywacji, a wręcz przeciwnie – stymuluje do wykorzystywania innych sposobów, co może być interesującym tropem możliwości rozwijania matematycznego uczniów słabszych. Kontynuowanie badań nad ich możliwościami w zakresie samodzielnego rozwiązywania zadań nietypowych wydaje się więc uzasadnione i potrzebne. Skupienie się na tym obszarze może być bardzo interesującym tropem badawczym wyznaczającym moje dalsze zamierzenia naukowe. Może się bowiem okazać, że zajmowanie się zadaniami nietypowymi nie tylko wspiera rozwój myślenia matematycznego, co już wykazano w referowanych tu wynikach badań, ale także wzmacnia inne obszary, często zaniedbywane w szkole, jak budowanie poczucia mocy sprawczej czy obniżanie poziomu lęku przed matematyką właśnie u tych uczniów, którzy obecnie często są ograniczani poznawczo do zadań typowych i postępowania według schematu podanego przez nauczyciela.

Uczniowie w klasach początkowych często nie są wyposażani w narzędzia rozumowania[1]. Po przeczytaniu zadania w teście i spostrzeżeniu, że nie potrafią od razu przywołać sposobu rozwiązania, wykazują się bezradnością matematyczną i je opuszczają. Ostatnia analiza miała na celu porównanie liczby pominięć rozwiązania konkretnych typów zadań z uwzględnieniem grupy kontrolnej i eksperymentalnej oraz etapu pretest i postttest. Na potrzeby analizy wyodrębniono cztery grupy uczniów: tych, u których nie wystąpiły pominięcia zadania; u których wystąpiło jedno pominięcie lub dwa pominięcia; z trzema, czterema pominięciami oraz tych, u których odnotowano pięć i więcej pominięć (tab. 5).

Tabela 5. Zestawienie danych dotyczących liczby pominięć występujących przy realizacji zadań typowych i nietypowych przez uczniów z podziałem na typy klas i etap badania

Liczba pominięć	**Klasy kontrolne**	**Klasy eksperymentalne**	X^2	*df*	*p*
pretest – zadania typowe					
bez pominięć	382	357	1,45	3	0,70
1–2	76	82			
3–4	22	27			
5 i więcej	14	15			
posttest – zadania typowe					
bez pominięć	369	370	0,68	3	0,88
1–2	56	51			
3–4	25	21			
5 i więcej	14	16			

[1] Mam tu na myśli np. badanie relacji z zadania na przedmiotach lub wykonanie rysunku ukazującego związki między danymi.

Tabela 5. cd.

Liczba pominięć	Klasy kontrolne	Klasy eksperymentalne	X^2	*df*	*p*
pretest – zadania nietypowe					
bez pominięć	330	313	1,76	3	0,62
1–2	106	105			
3–4	30	39			
5 i więcej	28	24			
posttest – zadania nietypowe					
bez pominięć	301	313	4,85	3	0,18
1–2	102	101			
3–4	41	35			
5 i więcej	20	9			

Źródło: opracowanie własne.

W zakresie zadań nietypowych w teście końcowym w klasach eksperymentalnych zwiększyła się liczba uczniów bez pominięć zadań, a w klasach kontrolnych liczba ta się zmniejszyła w obu typach zadań. Wyniki uzyskane w obszarze liczby opuszczeń zadań w testach nie pokazują istotnych różnic w obu testach między klasami kontrolnymi i eksperymentalnymi. W postteście w obszarze zadań nietypowych zaznaczyła się jednak tendencja, która wymagałaby dalszych badań. Wśród uczniów z klas kontrolnych nieco więcej było takich, którzy pominęli dużą liczbę zadań w postteście. W preteście ta tendencja wydaje się odwrotna, choć różnice są minimalne. Ze względu na to, że w badaniach nie połączono wyników uczniów w preteście i postteście (brak zgody na oznaczanie symbolami), a w postteście brało udział mniej uczniów niż w preteście, można stwierdzić, że wnioski są niepewne. Z pewnością jest to frapujący wynik, pozwala również nakreślić obszar dalszych poszukiwań.

Podsumowanie

Pomimo że przedstawione wyniki badań mają charakter cząstkowy, są w nich widoczne dwa obszary badań. W pierwszym wskazuję na skuteczność pakietu zadań rozwiązywanych przez badanych uczniów w zakresie rozwijania myślenia matematycznego. W drugim rekonstruuję obszary zaniedbane w tym zakresie. Jednym z takich obszarów jest możliwość rozwijania umiejętności rozwiązywania zadań nietypowych poprzez samodzielne próby i tworzone strategie. Te doświadczenia pomagają w konstruowaniu poczucia mocy sprawczej uczniów, co przekłada się na częstsze podejmowanie prób rozwiązania kolejnych zadań. W wynikach prezentowanych badań jest zauważalny właśnie taki efekt. Przyjmując, że umiejętności matematyczne najmłodszych uczniów są fundamentem budowanej wiedzy użytkowej, pozwalającej na jej przetwarzanie, trzeba również dostrzec, że ograniczenia w tym zakresie mogą stanowić w przyszłości przeszkodę w pokonywaniu kolejnych etapów kształcenia oraz w rozwijaniu umiejętności radzenia sobie z problemami. Zróżnicowane doświadczenia poznawcze w zakresie zadań problemowych mogą umacniać umiejętność rozumowania matematycznego, ale w przypadku znaczeń budowanych odtwórczo i schematycznie staną się hamulcem w rozwoju myślenia matematycznego. Jakże słuszne porównanie George'a Polyi pokazuje brak sensu tego rodzaju aktywności odtwórczej: „Uczenie mechanicznego wykonywania typowych operacji matematycznych i niczego więcej leży niewątpliwie poniżej poziomu książki kucharskiej, gdyż przepisy kucharskie zostawiają coś do fantazji i sądu kucharki, a przepisy matematyczne – nic" (Polya 2009: 200).

Rozwiązując zadania nietypowe, uczniowie mają szansę dostrzegać matematyczne powiązania uwolnione od schematycznego, gotowego wzoru postępowania, co pokazano już we wcześniejszych badaniach. Wyniki przedstawione w niniejszym tekście potwierdzają te uprzednie ustalenia. Trzecioklasiści z klas eksperymentalnych rozwinęli swoje kompetencje w zakresie rozumowania dzięki zajmowaniu się zadaniami przygotowanymi do ich samodzielnej aktywności poznawczej. Przedstawione badania ukazały również pewne nowe tropy, szczególnie interesujące w kontekście charakterystyki uczniów słabszych matematycznie. Rozwijanie umiejętności rozumowania matematycznego nie może nastąpić bez samodzielnych prób dostrzegania relacji w zadaniach matematycznych. Uczniowie (również ci o niższym poziomie wiedzy matematycznej) potrzebują takich częstych doświadczeń.

Literatura

Bruner J. (1978), *Poza dostarczone informacje*. Warszawa, PWN.

Dąbrowski M. (2008), *Pozwólmy dzieciom myśleć*. Warszawa, CKE.

Dąbrowski M. (2009a), *Rozwiązywanie zadań tekstowych*. W: M. Dąbrowski, *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa, CKE.

Dąbrowski M. (2009b), *Edukacyjna codzienność klasy trzeciej*. W: M. Dagiel, M. Żytko, *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Nauczyciel kształcenia zintegrowanego – wiele różnych światów?* Warszawa, CKE.

Dąbrowski M. (2013), *(Za) trudne, bo trzeba myśleć? O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia.* Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Dolata R., Hawrot A., Humenny G., Jasińska-Maciążek A. (2014), *Kontekstowy model oceny efektywności nauczania po pierwszym etapie edukacyjnym*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Dyrda B. (2012), *Edukacyjne wspieranie rozwoju uczniów zdolnych. Studium społeczno-pedagogiczne*. Warszawa, Wydawnictwo Akademickie „Żak".

Hattie J.A. (2009), *Visible Learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London–New York, Routledge.

Kalinowska A. (2010a), *Zadania problemowe w klasach początkowych – między wiedzą osobistą a jej formalizacją.* Kraków, Oficyna Wydawnicza „Impuls”.

Kalinowska A. (2010b), *Pozwólmy dzieciom działać. Mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego*. Warszawa, CKE.

Kalinowska A. (2011), *Czytanie tekstów matematycznych.* W: M. Dąbrowski (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa, CKE.

Klus-Stańska D. (2000), *Konstruowanie wiedzy w szkole*. Olsztyn, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego.

Klus-Stańska D., Kalinowska A. (2004), *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów.* Warszawa, Wydawnictwo Akademickie „Żak”.

Klus-Stańska D., Nowicka M. (2014), *Sensy i bezsensy w edukacji wczesnoszkolnej*. Gdańsk, Harmonia Universalis.

Konarzewski K. (2012), *TIMSS i PIRLS 2011: osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej.* Warszawa, CKE.

Krygowska Z. (1979), *Zarys dydaktyki matematyki.* Cz. 1. Warszawa, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Polya G. (2009), *Jak to rozwiązać?* Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.

Raport EACEA (2011), *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies* [polska wersja: *Nauczanie matematyki w Europie: ogólne wyzwania i strategie krajowe*. Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji, Warszawa].

Rubacha K. (2008), *Metodologia badań nad edukacją*. Warszawa, Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne.

Schoenfeld A. (1992), *Learning to Think Mathematically*. W: D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, Macmillan.

Semadeni Z., Gruszczyk-Kolczyńska E., Treliński G., Bugajska-Jaszczołt B. Czajkowska M. (2015), *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka.* Kielce, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP Spółka z o.o.

Townsend T., Bates R. (eds.) (2007), *Handbook of teacher education: Globalisation, standards and professionalism in times of change*. Dordrecht, Springer Netherlands.

Zimmerman B.J., Kitsantas A. (1997), *Developmental phases in self-regulation: Shifting from process to outcome goals.* „Journal of Educational Psychology”, 89.