PROBLEMY WCZESNEJ EDUKACJI / ISSUES IN EARLY EDUCATION ISSN 1734-1582
3 (38) / 2017 e-ISSN 2451-2230

Alina Kalinowska
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
alina.kalinowska@uwm.edu.pl

Matematyczna aktywność badawcza uczniów klas początkowych. Między koncepcjami naukowymi i potocznymi

Summary

Research into mathematical exploration done by students of early education. Between scientific and common concepts

Conditions stimulating an independent creation and formulation of regularities require particular cognitive scenarios. In the early grades, students have the opportunity to develop this all-compassing intellectual ability mostly due to the specially designed educational and explorative conditions. The paper is an attempt to present a common understanding of mathematical analysis done by the students in the early grades and offers an alternative way of perceiving sush inquiries during the class.

Słowa kluczowe: wiedza potoczna, prawidłowości matematyczne, matematyczna aktywność badawcza ucznia

Keywords: common knowledge, mathematical regularities, mathematical exploration done by students

Wprowadzenie

Potoczność jako kategoria teoretyczna stała się w ostatnich kilku dziesięcioleciach przedmiotem rosnącego zainteresowania nauk społeczno-humanistycznych. Również w pedagogice dostrzeżono potencjał, jaki może ona zaoferować dla pogłębienia rozumienia zjawisk edukacyjnych. Potoczne myślenie i potoczna wiedza okazują się czynnikami silnie wpływającymi na rzeczywistość szkolną. W tym artykule chcę się do niej odnieść, by zwrócić uwagę na przyczyny braku okazji do prowadzenia w szkole matematycznych badań i eksploracji przez uczniów klas początkowych.

Potoczność myślenia jest przeciwstawiana wiedzy naukowej z bardziej lub mniej zarysowaną granicą między nimi (Klus-Stańska 2010: 52 i dalsze). Wiedza potoczna ma charakter pragmatyczny, jest narzędziem do przewidywania własnych działań (Leppert 1996: 16). Jej kryterium poznawczym jest zdrowy rozsądek i „stanowi produkt uboczny praktycznej działalności ludzi" (Such, Szcześniak 2010: 35). Wiedza potoczna służy do „oswajania" rzeczywistości i podejmowania życiowych wyborów, podczas gdy do wiedzy naukowej badacz ma dystans i posługuje się nią świadomie i intencjonalnie znając zakres jej ograniczeń (Lachowicz-Tabaczek 2004: 17). Potoczność można również rozumieć nie tylko jako pewną opozycję do wiedzy naukowej, ale wręcz przeciwnie, jako „uniwersum symboliczne", będące jedną z najważniejszych potrzeb człowieka do funkcjonowania w rzeczywistości, również pedagogicznej (Leppert 1996: 17 i dalsze). Wiedza potoczna nauczycieli wywodzi się często z osobistych doświadczeń szkolnych. Podejmowane w tej roli działania muszą być zgodne z ich uświadomionymi (lub nie) koncepcjami potocznymi, a rozumienie edukacji wówczas wybudowane może być rozbieżne z doniesieniami współczesnych badań.

Opisując i analizując nauczanie matematyki w klasach najmłodszych bardzo rzadko używamy pojęć *eksperymen*t czy *doświadczenie matematyczne*. Podstawa programowa wspomina co prawda o potrzebie prowadzenia badań na lekcjach (Dz. U. 24.02.2017, poz. 356, s. 17, file:///C:/Users/Malina/Downloads/D2017000035601.pdf, dn. 29.03.2017), ale w treściach szczegółowych już tego nie uwzględnia[1]. Zapisy wyraźnie sugerują, że uczeń musi najpierw poznać (dostarczone przez kogoś) pojęcia, żeby potem je wykorzystywać. Takie zapisy pokazują reprezentowany przez decydentów sposób myślenia o wczesnoszkolnej edukacji matematycznej, w której uczniowie nie są zachęcani do samodzielnego budowania znaczeń podczas manipulowania, eksplorowania i eksperymentowania, jako niedostępnych im aktywności (Dąbrowski 2009a). To koncepcja, która zdezaktualizowała się kilka dziesiątek lat temu i która wynika z limitowanych potocznością sądów i przekonań.

Nieustające reformy szkolne nie zmieniają znacząco koncepcji wczesnoszkolnej edukacji matematycznej. Niepokojące zjawiska, jak choćby malejąca gwałtownie liczba uczniów matematyczne uzdolnionych już w kilka miesięcy po rozpoczęciu szkolnego uczenia się (Gruszczyk-Kolczyńska 2011), czy niezadowalające wyniki w zakresie osiągnięcia najwyższego progu umiejętności matematycznych (Konarzewski 2016: 30) sugerują potrzebę koncepcyjnej zmiany podejścia do nauczania matematyki.

Podpisując się pod rekomendacjami zmian w edukacji matematycznej stawiam tezę, że barierą w ich wprowadzaniu jest znacząca przepaść między obrazem myślenia matematycznego i jego rozwoju, jaki wynika z badań naukowych, a potocznymi, przenikającymi szkolną codzienność koncepcjami na ten temat. Kategoriami porządkującymi analizę będą: intuicja, ekonomia myślenia matematycznego, język matematyczny i mowa eksploracyjna. Przyjmuję je jako zasadnicze we wskazywaniu obszarów całkowicie ignorowanych, a nawet deprecjonowanych w potocznych koncepcjach wczesnej edukacji matematycznej, a które znalazły się w centrum zainteresowań współczesnych naukowych koncepcji odnoszących się do tej problematyki.

[1] Jedynie w przypadku edukacji przyrodniczej pojawia się zapis wyraźnie kierujący ucznia do takiej aktywności: „planuje, wykonuje proste obserwacje, doświadczenia i eksperymenty dotyczące obiektów i zjawisk przyrodniczych."

Matematyczna aktywność badawcza uczniów na poziomie wczesnoszkolnym – dyskusja z potocznym jej pojmowaniem

Znana to prawda, że każdy ma się za eksperta od edukacji szkolnej, zgodnie z argumentem: „też chodziłem/łam do szkoły". Potoczne postrzeganie nauczania matematyki na etapie wczesnoszkolnym wykazuje uderzającą spójność z wizją biurokratyczno-urzędniczą, która okazuje się narzędziem prawnego konstytuowania naiwnych koncepcji pedagogicznych. Wbrew wielu doniesieniom naukowym o poważnym w skutkach nierespektowaniu osobistych matematycznych doświadczeń i pomijaniu ich strategii rozumienia, szkodliwości ograniczania obszarów działania sprzyjających budowaniu pogłębionych pojęć w edukacji wczesnoszkolnej (Klus-Stańska, Nowicka 2005; Dylak 2014; Dąbrowski 2013), blokowaniu przechodzenia dzieci na nowe, wyższe, a dostępne dla nich poziomy rozumowania (Filipiak 2015), od wielu już lat najważniejszym, dekretowanym administracyjnie celem stała się mechaniczna sprawność rachunkowa, a treści matematyczne dotyczące tego zakresu były systematycznie upraszczane i ograniczane[2].

Jak wskazują badania, oczekiwania wobec absolwenta trzeciej klasy dotyczą przede wszystkim perfekcyjnej znajomości tabliczki mnożenia oraz umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem (Kalinowska 2009: 81 i dalsze). Z tej perspektywy wczesnoszkolne nauczanie matematyki jest konstruowaniem strategii odtwórczych, „po śladzie" nauczyciela (Klus-Stańska 2000:123 i dalsze). Uczniowie ćwiczą na lekcjach głównie umiejętności związane z zapamiętaniem algorytmów i schematów postępowania[3], a szkoła nie wierzy w ich możliwości do budowania własnego zdania na temat reguł i koncepcji matematycznych (Lockhart 2009: 36 i dalsze). I choć powinni oni jak najwcześniej budować pojęcia matematyczne w sensie operacyjnym (Krygowska 1977: 81 i dalsze) i relacyjnym, w potocznym jednak rozumieniu wczesnoszkolne pojęcia matematyczne noszą znamiona gotowych schematów do odtwarzania w identyczny ze wzorem sposób, co implikuje wysoką częstotliwość powtarzania, utrwalania i ćwiczenia w podobny sposób na lekcjach matematyki.

Matematyka, która pod względem kulturowym i psychologicznym jest narzędziem logicznego i analitycznego rozumowania, potocznie utożsamiana jest redukcyjnie ze sprawnym rachowaniem. Także myślenie dziecka w wieku wczesnoszkolnym, jego potencjał badawczy, zwłaszcza ten dotyczący matematycznego badania rzeczywistości jest niedoceniany i infantylizowany. Edukacja oparta na takich przekonaniach w kon-

[2] Obecna podstawa z 2017 roku zwiększa zakres liczbowy, ale nie zmienia koncepcji edukacji matematycznej.

[3] Badania umiejętności matematycznych trzecioklasistów i sposób używania przez nich wiedzy matematycznej wskazują na taką właśnie codzienność nauczania matematyki w klasach najmłodszych. Por. M. Dąbrowski (2009), *Edukacyjna codzienność klasy trzeciej*. W: M. Dagiel, M. Żytko (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Nauczyciele kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* Warszawa, CKE; E. Gruszczyk-Kolczyńska, *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli*.

sekwencji może prowadzić do swego rodzaju matematycznego analfabetyzmu funkcjonalnego (Klus-Stańska, Nowicka 2005: 107). Temu nauczycielsko-metodycznemu podejściu towarzyszy przekonanie, że działania dziecka nie mogą polegać na intuicyjnym szukaniu samodzielnie tworzonych strategii i rozwiązań, ponieważ wprowadza to chaos poznawczy, nad którym nie potrafi ono zapanować. Bezpieczniejsza wydaje się w tym kontekście droga wypełniania w tym samym czasie, przez wszystkich, uczniów takich samych (najczęściej odtwórczych) zadań z kart pracy. Nauczyciel ma wówczas złudne poczucie kontroli nad tym, czego uczą się dzieci. Tymczasem J. Bruner twierdzi, że możliwość intuicyjnego uchwycenia podstawowych pojęć z matematyki ujawnia się już u dzieci rozumujących na poziomie operacji konkretnych i takie doświadczenia są niezbędne do budowania rozumienia zaawansowanych intelektualnie sposobów myślenia matematycznego (por. J. Bruner 1987: 685 i dalsze). Nacisk na dokonywanie odkryć w uczeniu się skłania osobę uczącą się do określonego organizowania tych danych, z którymi się spotyka tak, aby można było z nich łatwiej skorzystać przy rozwiązywaniu problemu (Bruner 1978: 669). Jak dalej podkreśla, już małe dzieci są w stanie zrozumieć skomplikowane koncepcje matematyczne, jeśli będą one podane w odpowiedni sposób, ale – co kluczowe – „człowiek uczy się roboczej heurystyki dokonywania odkryć” jedynie poprzez ćwiczenie w tym zakresie i nabywanie praktyki (Bruner 1978: 676). Zajmowanie się problemami jest więc warunkiem pogłębionego i refleksyjnego rozumienia pojęć matematycznych i świadomości, czym jest matematyka i jakie znaczenie ma ona w otaczającym świecie.

Ostatnie dziesięciolecia zmieniły radykalnie podejście do matematyki jako nauki, szczególnie odnośnie do jej społecznego charakteru (Piotrowska 2008: 17 i dalsze). Nowe spojrzenie dotyczy przede wszystkim poszerzenia granic znaczeniowych matematyki oraz jej rekonceptualizacji. Dostrzega się coraz częściej wielowymiarowość interpretacyjną dotyczącą na przykład celów nauczania matematyki, wiedzy matematycznej czy sposobu jej użytkowania (Ernest za: Piotrowska 2008). Edukacja matematyczna obejmuje obecnie nowe obszary, jak poszukiwania matematyki w wizualnym świecie wokół nas (Makiewicz 2013) czy głębsze rozumienie jej związków z kulturowymi uwarunkowaniami poznawania oraz płcią (Kopciewicz 2012).

Współczesne koncepcje edukacji matematycznej w centrum zainteresowań umieszczają: fundamentalne znaczenie wczesnych doświadczeń matematycznych (Gruszczyk-Kolczyńska 2008), samodzielne konstruowanie pojęć (Klus-Stańska 2000), rozwijanie u dzieci gotowości do inicjowania, modyfikowania i nienaśladowczego stosowania zróżnicowanych sposobów działania (Dixon 2005: 391; Mason, Burton, Stacey 2005; Kapur, Toh 2013: 347–348). Podkreśla się znaczenie umiejętności samodzielnego tworzenia bardziej ekonomicznych strategii, używania i doskonalenia własnej argumentacji, rozwijania krytycyzmu (Lockhart 2009: 43), a także rolę warunków do oddolnego wytwarzania i rozwijania pomysłów oraz niekierowanego korygowania mylnych koncepcji (Boaler 2016: 11 i dalsze; Lu, Bridges, Hmelo-Silver 2014: 298; Gopnik, Meltzoff, Kuhl 2004: 34). Zgromadzono liczne dowody empiryczne na znaczenie manipulowania przedmiotami jako istotnej podstawy i charakterystyki rozumienia pojęć i relacji matematycznych (Wood 2006: 245; Mason, Burton, Stacey 2005: 151 i dalsze). Już J. Piaget jako warunek rozwijania myślenia (w tym myślenia matematycznego), wskazywał konieczność manipulowania przedmiotami (Piaget 2006), a według J. Brunera uczenie się matematyki należy zaczynać od działań instrumentalnych (Bruner 1978: 716). Nadano również wysoki status poznawczy umiejętności samodzielnego dostrzegania i odkrywania regularności, stanowiących istotę pojęć matematycznych (Góralski 2013: 20). Danych, które są źródłem ważnych, nowych rekomendacji psychologicznych, dostarczają zarówno koncepcje i badania z obszaru konstruktywizmu rozwojowego, o piagetowskiej proweniencji, jak i konstruktywizmu socjokulturowego L.S. Wygotskiego. Wczesnoszkolna edukacja matematyczna może być właśnie miejscem takich aktywności, a określony sposób zajmowania się matematyką w najmłodszych klasach buduje w umyśle umiejętność twórczego używania matematyki nie tylko w szkole, ale i poza nią.

Potocznie przyjmuje się jednak, że dzieciom trzeba najpierw powiedzieć, jak mają sobie radzić z zadaniem, a odkrycia są zarezerwowane dla najzdolniejszych uczniów. Nawet opracowana w Polsce już kilkadziesiąt lat temu przez Z. Krygowską czynnościowa metoda nauczania matematyki, która zdaniem H. Siwek „realizuje podejście konstruktywistyczne" (Siwek 2005: 45), nie przyjęła się w potocznym myśleniu o nauczaniu wczesnoszkolnym.

Przyłączając się do dyskusji nad możliwością uruchamiania we wczesnej edukacji matematycznej aktywności badawczej uczniów i doświadczaniem matematyki, przedstawię fragment prowadzonych przeze mnie badań.

Metoda badań

Pod względem semantycznym pojęcie doświadczenia pozostaje w bliskim związku znaczeniowym z eksperymentem, ponieważ jego treść i zakres odwołują się do wiadomości i umiejętności zdobytych przez obserwacje, uczestnictwo, aktywność, przeżycie emocjonalne, ale też ingerowanie w rzeczywistość. Wszystkie te działania muszą być integralnie związane z samodzielnością ucznia i nie są tożsame z obserwowaniem pokazu nauczyciela (Semadeni 2016: 5). Matematyczną aktywność badawczą ucznia będę tu więc rozumieć jako jego intuicyjnie prowadzone obserwacje określonych zmian obiektów matematycznych w celu odkrycia i głębszego rozumienia relacji i struktur matematycznych. Niezbędnymi aspektami tej działalności są: samodzielność manipulacji, obserwacji i konstruowania wniosków oraz świadomość celu poznawczego. Inaczej mówiąc, działanie ucznia według kolejnych szczegółowych poleceń nauczyciela, nawet jeśli kieruje go do wiedzy wcześniej mu nieznanej, nie jest w tym ujęciu aktywnością badawczą.

W celu rozpoznania sposobów prowadzenia wczesnej matematycznej aktywności badawczej przebadano próbę 113 uczniów klas drugich i trzecich. Jako próba ingerencji w praktykę pedagogiczną została tu zastosowana metoda badań w działaniu (Kruger 2007). Celem było sprawdzenie, w jaki sposób uczniowie będą podejmować samodzielną aktywność poznawczą nad nowym problemem matematycznym oraz jakie umiejętności poznawcze mogą rozwijać podczas sprowokowanych prób szukania i odkrywania prawidłowości matematycznych. Zgromadzony materiał został poddany analizie w celu identyfikacji głównych charakterystyk myślenia matematycznego wskazywanych w konstruktywizmie. Niżej przedstawiam niektóre wyniki i konkluzje.

W artykule do analizy wykorzystam tylko dwa zadania z dwunastu proponowanych uczniom. Ta decyzja wynika z wymaganych rozmiarów tekstu, ale przede wszystkim z określonej struktury tych zadań przedstawionej w postaci karty pracy z rysunkiem tabeli. Chciałam z ich pomocą pokazać, jak wiele informacji o myśleniu dziecka i jego próbach rozumienia matematyki można uzyskać już na podstawie tak małej liczby niestandardowo skonstruowanych zadań. Po drugie, pokazuje, jakim owocnym edukacyjnie wyzwaniem jest każda tego typu trudność poznawcza. Pod tymi względami to sytuacja zupełnie odmienna od tej, która ma miejsce, gdy uczniowie rozwiązują zadania typowe, które powszechnie uważa się za jedyne dostępne młodszym uczniom. To jeden z dowodów na nietrafność potocznych, więcej niż „skromnych" wyobrażeń na temat intelektualnego i badawczego potencjału dzieci, który – jak tu się okazuje – wyzwala się przy najprostszych okazjach, jeśli tylko je stworzymy.

Co, jak i po co ma badać uczeń na matematyce w klasach początkowych – wyniki badań

Kategorie, które najsilniej uwidoczniały się w strategiach uczniowskich to: intuicja, ekonomia myślenia matematycznego, język matematyki i mowa eksploracyjna, manipulacja przedmiotami.

Intuicja

Doświadczanie matematycznej aktywności badawczej związane jest z myśleniem indukcyjnym i odkrywaniem regularności. W uczniowskich rozwiązaniach wyraźne jest uruchamianie takiego myślenia. Przykład poniższy z lewej pokazuje, jak uczeń rozszerza zauważone przypadki na pozostałe przykłady sprawdzanej relacji. Inny uczeń dostrzegł (przykład po prawej) przede wszystkim zmiany w liczbach i taką regułę opisał. Zauważył, że w pierwszej rubryce błędna hipoteza zaburzyła pojawianie się tej samej liczby. Poprawna natomiast pozwala na wstawienie zawsze tej samej liczby.

IIa

Weź kilka fasolek. Wykorzystaj je do uzupełnienia tabeli.

	Hipoteza Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?	**Sprawdzenie** Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?
Podziel fasolki na dwie różne kupki.	4	2
Do każdej kupki dołóż po 3 fasolki.	2	2
Do każdej kupki dołóż po dwie fasolki.	2	2
Od każdej kupki odejmij po 4 fasolki.	2	2

Co zauważyłaś/~~łeś~~? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

Zauważyłam że jeśli mamy hipotezę np. 8 a okazuje się że w sprawdzeniu jest np. 4 to w pozostałych miejscach też będzie 4.

Klasa II A

Weź kilka fasolek. Wykorzystaj je do uzupełnienia tabeli.

	Hipoteza Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?	**Sprawdzenie** Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?
Podziel fasolki na dwie różne kupki.	2	1
Do każdej kupki dołóż po 3 fasolki.	1	1
Do każdej kupki dołóż po dwie fasolki.	1	1
Od każdej kupki odejmij po 4 fasolki.	1	1

Co zauważyłaś/łeś? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

Zauważyłem że jak się zgadnie to liczba będzie taka sama a jak się nie zgadnie na przykład nie zgadnie się o jeden to wtedy będzie wszędzie 1.

Stawianie hipotez jest czynnością integralnie związaną z procesem porównywania i dostrzegania podobieństw i różnic. W proponowanych zadaniach uczniowie uruchamiali myślenie hipotetyczne (domniemywanie) oraz wyraźnie dostrzegali wagę jego sprawdzenia.

Weź kilka fasolek. Wykorzystaj je do uzupełnienia tabeli.

	Hipoteza Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?	**Sprawdzenie** Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?
Podziel fasolki na dwie różne kupki.	0 0?	0 0 !
Do każdej kupki dołóż po 3 fasolki.	0 3?	6 0 !
Do każdej kupki dołóż po dwie fasolki.	0 5?	6 0 !
Od każdej kupki odejmij po 4 fasolki.	0 9?	0 0 !

Co zauważyłaś/łeś? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

Ciągle było 0 0 !!! +

Podejmowanie prób badawczych pomaga „oswoić" pojawianie się błędnych przypuszczeń i postrzegać je jako naturalne etapy radzenia sobie z problemem matematycznym, a nie jako zjawiska niepożądane i naganne.

Następy przykład pokazuje akceptację błędnych założeń, ale również braku końcowej odpowiedzi. Satysfakcją dla ucznia może być samo podejmowanie prób. Brak ostatecznej odpowiedzi traci tu pejoratywny wydźwięk i przeciwdziała rozwijaniu negatywnych zachowań wielu uczniów, którzy często po przeczytaniu zadania mówią natychmiast z poczuciem porażki: *nie umiem*, ponieważ nie wiedzą, jak dojść do ostatecznego wyniku liczbowego.

Julka K. 3C

Weź kilka fasolek. Wykorzystaj je do uzupełnienia tabeli.

	Hipoteza Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?	Sprawdzenie Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?
Podziel fasolki na dwie różne kupki.	Różnica wynosi 4.	Pomyliłam się o 1.
Do każdej kupki dołóż po 3 fasolki.	Różnica będzie 10.	Miałam rację.
Do każdej kupki dołóż po dwie fasolki.	Różnica będzie o 11.	Pomyliłam się o 6
Od każdej kupki odejmij po 4 fasolki.	Różnica będzie o 9.	Pomyliłam się o 6.

Co zauważyłaś/łeś? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

Nic nie zauważyłam.

W przykładach widoczna jest aktywność polegająca na hipotetyzowaniu i próbach weryfikowania tworzonych koncepcji. Umiejętności te są istotne w tworzeniu warsztatu badawczego ucznia i rozwiazywania problemu: „Co by było gdyby?" w kontekstach matematycznych. Dzięki temu staje się możliwa analiza zmian w danych i zauważenie ogólniejszej relacji.

Ekonomia myślenia matematycznego

Rozwój myślenia matematycznego w dużej mierze polega na tworzeniu ekonomiczniejszych strategii postępowania. Podczas matematycznej aktywności badawczej dzieci wyraźnie pojawiały się tego rodzaju próby wykorzystania bardziej „oszczędnego" i wydajnego sposobu postępowania przez zastąpienie rysunku fasolek zapisem cyfrowym ich relacji.

krzystian IJL

Weź kilka fasolek. Wykorzystaj je do uzupełnienia tabeli.

	Hipoteza Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?	Sprawdzenie Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?
Podziel fasolki na dwie różne kupki.		4
Do każdej kupki dołóż po 3 fasolki.		4
Do każdej kupki dołóż po dwie fasolki.		4
Od każdej kupki odejmij po 4 fasolki.		4

Co zauważyłaś/łeś? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

…Jedna kupka jest większa a druga mniejsza…

Tworzenie ekonomiczniejszych strategii jest w pewien sposób tożsame z uogólnianiem zauważonych prawidłowości oraz umiejętnością zapisywania ich w uporządkowany sposób, który pomaga dostrzec regularność zmian. Dzieci w tym wieku nie dysponują jeszcze umiejętnością dokonywania uporządkowanego zapisu, a przez próby związane z własną aktywnością badawczą uczą się wykorzystywać różne sposoby systematyzowania zapisu informacji (na przykład w postaci tabeli czy prostego wykresu). Zaproponowana struktura zadania do prowadzenia aktywności badawczej pozwala uczniowi rozbudowywać zakres takich umiejętności.

Ekonomiczne strategie uczniów były związane z ich aktualnym poziomem myślenia matematycznego. Niektórzy jedynie zauważali i opisywali szczególny przypadek ich własnych prób, podczas gdy inni dostrzegali zależności uogólnione w wyjaśnieniu.

Julka D. III c

Weź kilka fasolek. Wykorzystaj je do uzupełnienia tabeli.

	Hipoteza Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?	**Sprawdzenie** Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?
Podziel fasolki na dwie różne kupki.	5	6
Do każdej kupki dołóż po 3 fasolki.	6	6
Do każdej kupki dołóż po dwie fasolki.	6	6
Od każdej kupki odejmij po 4 fasolki.	6	6

Co zauważyłaś/łeś? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

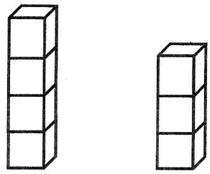
Zawsze jest o sześć.

Bo jedna kupka jest mniejsza.

Ta uczennica dostrzegła pewne relacje, ale przypisała je raczej wybranej liczbie fasolek i nie jest pewne, czy mogłaby uogólnić to spostrzeżenie. Jednak doświadczanie samodzielnego manipulowania i zauważania zmian na innych liczbach, będzie umożliwiało w przyszłości przejście na wyższy poziom uogólnienia. W poniższym przykładzie uczeń opisuje zauważony fakt zwiększania się wież, jeszcze słabo łącząc go z różnicą między nimi.

Zbuduj dwie wieże. Jedną z 4 klocków i drugą z 3 klocków.

O ile klocków jedna wieża jest większa od drugiej?



IIe

	Hipoteza O ile więcej klocków jest w jednej z wież niż w drugiej?	**Sprawdzenie** Sprawdź o ile więcej klocków jest w jednej z wież niż w drugiej?
Do każdej z wież dołóż po 1 klocku.	1	1
Do każdej z wież dołóż po 2 klocki.	1	1
Do każdej z wież dołóż po 4 klocki.	1	1

Co zauważyłaś/łeś?

Zauważyłem że wieże, rożnią o 1 klocek więcej.

Uogólnienie na wyższym poziomie pokazuje kolejny przykład, w którym uczeń drugiej klasy dostrzegł regularność oderwaną od konkretnego przykładu liczbowego.

Weź kilka fasolek. Wykorzystaj je do uzupełnienia tabeli.

	Hipoteza Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?	**Sprawdzenie** Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?
Podziel fasolki na dwie różne kupki.	5	4
Do każdej kupki dołóż po 3 fasolki.	4	4
Do każdej kupki dołóż po dwie fasolki.	4	4
Od każdej kupki odejmij po 4 fasolki.	4	4

Co zauważyłaś/łeś? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

Zawsze jak do dwu kupek będziemy dodawali po tyle samo to różnica będzie taka sama.

Kolejny uczeń klasy drugiej demonstruje bardzo wysoki poziom uogólnienia zauważonych regularności. Dostrzega ich poprawność w zakresie dwóch działań, choć proces badawczy obejmował tylko dodawanie.

Weź kilka fasolek. Wykorzystaj je do uzupełnienia tabeli. II a

	Hipoteza Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?	**Sprawdzenie** Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?
Podziel fasolki na dwie różne kupki.	2	1
Do każdej kupki dołóż po 3 fasolki.	1	1
Do każdej kupki dołóż po dwie fasolki.	1	1
Od każdej kupki odejmij po 4 fasolki.	1	1

Co zauważyłaś/eś? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

Zauważyłam że jak i się dodaje i odejmuje w dwuch kupkach po tyle samo to i tak będzie ciągle taka sama różnica.

Uświadomienie sobie tak uogólnionej regularności ma znaczenie na przykład dla rozszerzania strategii obliczania w pamięci wyniku odejmowania dwóch liczb z przekraczaniem progu dziesiątkowego (na przykład 81–57). Zamiast bowiem obciążania pamięci operacyjnej można wykorzystać wiedzę o fakcie braku wpływu jednakowych zmian odjemnej i odjemnika na różnicę, czyli można wykonać znacznie prostsze działanie (w tym wypadku 80–56).

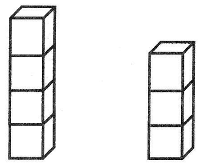
Język matematyki i mowa eksploracyjna

Tworzenie uzasadnień do zauważonych prawidłowości wymaga od uczniów spontanicznego używania języka matematyki. W potocznym ujęciu wczesnoszkolnej edukacji matematycznej narzucanie terminologii przez nauczyciela jest konieczne do budowania języka pojęć matematycznych. Tymczasem, jak pokazują badania zespołu pod kierunkiem E. Filipiak dzieci, które są stymulowane do swobodnej aktywności językowej rozwijały poczucie kompetencji w formułowaniu wniosków oraz umiejętność kierowania własnym myśleniem podczas rozwiązywania problemów, również matematycznych (Filipiak, Lemańska-Lewandowska 2015). Poniżej pokazuję przykład próby sformułowania zauważonej regularności i budowania nowej wiedzy i problemu przez ucznia klasy drugiej. Jego uzasadnienie ukazuje rozumienie hipotetycznej sytuacji, w której relacja wielkości między wieżami będzie odwrotna i kiedy może się to zdarzyć. Uczeń używa potocznej narracji do opisania matematycznego zjawiska zmian relacji większości/mniejszości między wieżami.

Wojtek kl. II

Zbuduj dwie wieże. Jedną z 4 klocków i drugą z 3 klocków.

O ile klocków jedna wieża jest większa od drugiej?



	Hipoteza O ile więcej klocków jest w jednej z wież niż w drugiej?	Sprawdzenie Sprawdź o ile więcej klocków jest w jednej z wież niż w drugiej?
Do każdej z wież dołóż po 1 klocku.	1	1
Do każdej z wież dołóż po 2 klocki.	1	1
Do każdej z wież dołóż po 4 klocki.	1	1

Co zauważyłaś/łeś?

zawsze bedzie druga wieża mniejsza
chyba że da sie 2 klocki towtedy będzie większa
ale nie można dodać do wieży większej.

Na „codziennych" lekcjach brakuje okazji do swobodnego uruchamiania języka wobec matematycznych zadań i zdarzeń (Dąbrowski 2009b). Za to podczas badań matematycznych jest okazja do rozwijania mowy eksploracyjnej (Barnes 1988), zwanej „mówieniem dla uczenia się" (Hodges 1993). Uruchamia się ona w pracy w małych grupach w obliczu nieznanych wcześniej sytuacji matematycznych. Właśnie wtedy uczeń używa języka do samodzielnego nadawania znaczeń, a nie powtarzania słów nauczyciela. Konstruowane w ten sposób matematyczne pojęcia są następnie rozwijane i precyzowane, a dzięki doświadczeniom ze stosowaniem uczniowskiego języka potocznego, mają silną podstawę dla dalszego ewoluowania w kierunku pogłębionych pojęć naukowych. W ten sposób „[z] najomość znaczenia słowa wzrasta, podlega rozwojowi i zmianie" (Donaldson 1986: 94).

Manipulacja przedmiotami

Chociaż w klasach początkowych możliwe jest badanie relacji między liczbami w postaci symboli, jednak prowadzenie badań matematycznych powinno być związane z używaniem przedmiotów. Ich wykorzystywanie musi być naturalnym początkiem procesu budowania każdego z narzędzi myślenia matematycznego. Niestety, z badań umiejętności dzieci w klasach początkowych wynika, że najmłodsi uczniowie nie używają spontanicznie przedmiotów i innych narzędzi pomagających dostrzec zależności (Dąbrowski 2009), a im są starsi, tym mniej chętnie sięgają po nie. Dzieje się tak, ponieważ kultura nauczania w polskiej szkole nie zachęca do ich używania. Od dzieci oczekuje się, że poprzestaną na wypełnianiu zeszytów ćwiczeń i zliczaniu zamieszczonych tam statycznych obrazków, co J. Piaget nazwał werbalizmem obrazkowym (Piaget 1977), a na gruncie polskim E. Gruszczyk-Kolczyńska opisała jako „papierową edukację" (Gruszczyk-Kolczyńska 1994). Nawet korzystanie z zawsze dostępnych palców jest przez niektórych nauczycieli wręcz zakazywane. Tymczasem możliwość używania przez dzieci palców do liczenia wpływa na lepsze efekty matematyczne w latach późniejszych, a powstrzymywanie dzieci przed używaniem palców jest porównywalne do hamowania ich rozwoju matematycznego (Berteletti, Booth 2015). Inicjonowanie przez nauczyciela, ale samodzielne prowadzenie doświadczeń matematycznych, co dobrze odpowiada koncepcji przechodzenia do strefy najbliższego rozwoju (Wygotski 1971), może przeciwdziałać tym niekorzystnym poznawczo tendencjom i stymulować odkrywanie znaczenia przedmiotów dla budowania pojęć matematycznych.

Poniżej przykład możliwości manipulowania klockami przydatnego do zauważenia określonego efektu.

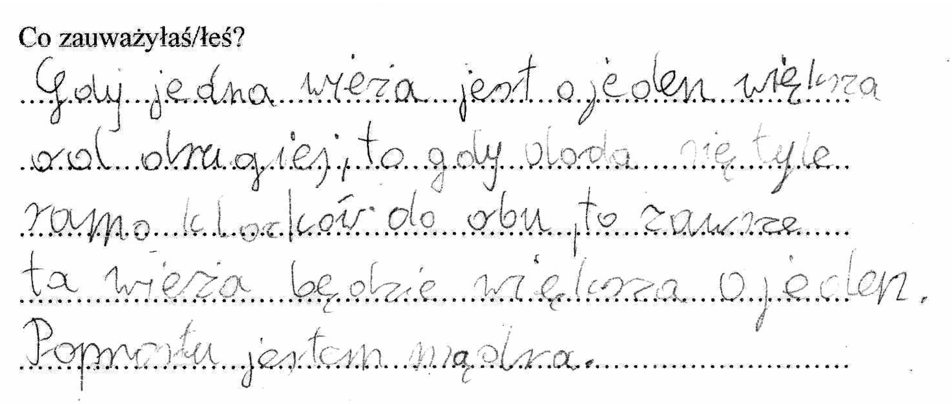
Weź kilka fasolek. Wykorzystaj je do uzupełnienia tabeli.

	Hipoteza Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?	**Sprawdzenie** Ile wynosi różnica między większą a mniejszą kupką?
Podziel fasolki na dwie różne kupki.	5	3
Do każdej kupki dołóż po 3 fasolki.	3	3
Do każdej kupki dołóż po dwie fasolki.	3	3
Od każdej kupki odejmij po 4 fasolki.	3	3

Co zauważyłaś/łeś? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?

Bo zawsze mi się różniło o 3

Obserwacja takich zmian jest fundamentalnym elementem konstruowania pojęć matematycznych, a na późniejszych etapach edukacji możliwość wyobrażenia sobie manipulacji pomaga rozumieć sytuacje problemowe. Samodzielne esperymentownie z obiektami i odkrywanie w ten sposób prawidłowości daje też szansę doświadczania mocy sprawczej (Trzebiński 1981), gdy dziecko jest przekonane, że poradzi sobie z trudnoscią, nawet jeśli nie od razu wie, jak to zrobić. Poniżej przykład satysfakcji i zadowolenia poznawczego ucznia.


Co zauważyłaś/łeś?
Gdy jedna wieża jest o jeden większa od drugiej, to gdy dodam tyle samo klocków do obu, to zawsze ta wieża będzie większa o jeden. Poprostu jestem mądra.

Podsumowanie z nadzieją w tle

Wbrew potocznej wizji wczesnoszkolnej edukacji matematycznej, naukowe odkrycia dostrzegają możliwości działania najmłodszych uczniów jako samodzielnych badaczy relacji matematycznych. Uczeń, który doświadcza aktywności badawczej i na podstawie tych doświadczeń wypełnia kartę pracy, ma okazję do uczenia się, że nie jest ona celem samym w sobie, ale jedynie pomocą porządkującą proces myślenia. Poza tym inicjowany i podtrzymywany przez dziecko proces badawczy zachęca do sięgania po przedmioty, wskazuje na ich użytkowość dla uczenia się matematyki i rozwiązywania problemów przez ich konkretyzację i obrazowanie. To korzyści intelektualne znaczące, ale nie jedyne. Ćwiczą też bowiem standardowe sprawności, a to oznacza, że aktywność badawcza nie tylko nie przeszkadza zdobywaniu podstawowej, oczekiwanej przez program, sprawności rachunkowej, ale ją poszerza o dodatkowe kompetencje.

Kolejnym celem edukacyjnym osiąganym przy okazji wypełniania proponowanych kart pracy jest rozwijanie umiejętności gromadzenia danych i ich analizowania. Wypełnianie takich kart pracy nie przypomina infantylnych obliczeń z niskiego zakresu liczbowego, które powszechnie traktuje się jako najbardziej odpowiednie dla młodszych uczniów, ale staje się impulsem dla podjęcia znaczącego wysiłku intelektualnego. Matematyczna aktywność badawcza uczniów najmłodszych jest istotna dla konstruowania modelu umysłu otwartego na dostrzeganie prawidłowości, uczącego się postępowania według pewnego systematycznego porządku oraz stawiania pytań i dyskutowania (również z samym sobą). Badania matematyczne mogą zaistnieć przede wszystkim w sytuacji, gdy sprawdzane są relacje i tworzone ich uogólnienia, dzięki rozpoznawaniu szczegółowych przypadków. Umiejętność rozwiązywania problemów nie rozwija się przez ćwiczenie wielu algorytmów, ale dzięki doświadczaniu sytuacji nowych i tworzeniu strategii radzenia sobie z nimi. W tym sensie dzieci mogą „socjalizować umysł" do określonej aktywności poznawczej.

Matematyczna edukacja wczesnoszkolna nie może być rozumiana jednowymiarowo, jako wprowadzenie podstawowych treści, na których bazować będą w przyszłości rozwijające się kompetencje poznawcze, ale powinna od pierwszych dni szkolnej edukacji stać się polem dziecięcych doświadczeń poznawczych wspierających kompetencje myślenia samodzielnego, plastycznego, twórczego. Jedną z aktywności odpowiadającą temu celowi może być samodzielne badanie relacji między obiektami matematycznymi przez najmłodszych uczniów.

Literatura

Aebli H. (1982), *Dydaktyka psychologiczna. Zastosowanie psychologii Piageta do dydaktyki*. Warszawa, PWN.

Barnes D. (1988), *Nauczyciel i uczniowie. Od porozumiewania się do kształcenia*. Warszawa, WSiP.

Berteletti I., Booth J.R. (2015), *Perceiving fingers in single-digit arithmetic problems.* „Frontiers in Psychology". Volume 6.

Boaler J. (2016), *Mathematical mindsets*. San Francisko, Jossey-Bass.

Bruner (1978), *Poza dostarczone informacje*. Warszawa, PWN.

Dahl K. i Lepp M. (2010), *Matematyka ze sznurka i guzika.* Poznań, Wydawnictwo Zakamarki.

Dąbrowski M. (2008), *Pozwólmy dzieciom myśleć*. Warszawa, CKE.

Dąbrowski M. (2009a), *Wykonywanie obliczeń*. W: M. Dąbrowski (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Trzecioklasista i jego nauczyciel*. Warszawa, CKE.

Dąbrowski M. (2009b*), Edukacyjna codzienność klasy trzeciej*. W: M. Dagiel, M. Żytko (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Nauczyciele kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?*. Warszawa, CKE.

Dąbrowski M. (2013), *(Za) trudne, bo trzeba myśleć? O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia*. Warszawa, IBE.

Dixon J.A. (2005), *Mathematical Problem Solving*. *The Roles of Exemplar, Schema, and Relational representations*. W: J.I.D. Campbell (red.), *Handbook of Mathematical Cognition*. New York, NY Psychology Press.

Dumont H., Insance D., Benavides F. (red.) (2013), *Istota uczenia się. Wykorzystanie badań w praktyce*. Warszawa, Wolters Kluwer Polska SA.

Dylak S. (2013), *Architektura wiedzy w szkole.* Warszawa, Difin SA.

Filipiak E. (2015), *Budowanie rusztowania dla myślenia i uczenia się dzieci w perspektywie społeczno-kulturowej teorii Lwa S. Wygotskiego*. W: E. Filipiak (red.), N*auczanie rozwijające we wczesnej edukacji według Lwa S. Wygotskiego. Od teorii do zmiany w praktyce.* Bydgoszcz, Agencja Reklamowo-Wydawnicza ArtStudio.

Filipiak E., Lemańska-Lewandowska E. (red.) (2015), *Model nauczania rozwijającego we wczesnej edukacji według Lwa S. Wygotskiego. Gotowość studentów i nauczycieli. Możliwości aplikacji.* Bydgoszcz, Agencja Reklamowo-Wydawnicza ArtStudio.

Gopnik A., Meltzoff A.N., Kuhl P.K. (2004)*, Naukowiec w kołysce. Czego o umyśle uczą nas małe dzieci.* Poznań, Media Rodzina.

Góralski (A. 2013), *George'a Polya pedagogika mistrzostwa, czyli o relacji uczeń-mistrz I jej regułach*. Warszawa, Wydawnictwo Akademii Pedagogiki Specjalnej.

Gruszczyk-Kolczyńska E. (1994), *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa, WSiP.

Gruszczyk-Kolczyńska E. (2008*), Program wspomagania rozwoju, wychowania i edukacji starszych przedszkolaków.* Wydanie drugie. Warszawa, Nowa Era.

Gruszczyk-Kolczyńska (2009), *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji.* Warszawa, Wydawnictwo Edukacja Polska.

Gruszczyk-Kolczyńska E. (red.) (2011), *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli*. Warszawa, Nowa Era Sp. z o.o.

Hodge B. (1993), *Teaching as Communication*. London – New York, Longman.

Hunn E. (1993), *Czynnik utylitarny ludowych klasyfikacjach biologicznych*. W: M. Buchowski (red.), *Amerykańska antropologia kognitywna: poznanie, język, klasyfikacja i kultura.* Warszawa, Instytut Kultury.

Kalinowska A. (2009), *Matematyczne równanie – wywiady z nauczycielami matematyki w klasach IV–VI*. W: M. Dagiel, M. Żytko (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Nauczyciele kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* Warszawa, CKE.

Kapur M., & Toh P.L.L. (2013), *Productive failure: From an experimental effect to a learning design.* In: T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research – Part B: Illustrative cases* (pp. 341–355). Enschede, the Netherlands: SLO. http://international.slo.nl/bestanden/Ch17.pdf [14.02.2017]

Klus-Stańska D. (2000), *Konstruowanie wiedzy w szkole.* Olsztyn, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego.

Klus-Stańska D., Nowicka M. (2005), *Sensy i bezsensy w edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa, Wydawnictwo Akademickie „Żak".

Klus-Stańska D., Nowicka M. (2013), *Sensy i bezsensy w edukacji wczesnoszkolnej*. Gdańsk, HARMONIA UNIVERSALIS.

Klus-Stańska D. (2010), *Dydaktyka wobec chaosu pojęć i zdarzeń*. Warszawa, Wydawnictwo Akademickie „Żak".

Konarzewski K., Bulkowski K. (red.) (2016), *Wyniki międzynarodowego badania osiągnięć czwartoklasistów w matematyce i przyrodzie.* Warszawa, IBE.

Kopciewicz L. (2012), *Równa szkoła. Matematyka, władza i pole wytwarzania kultury*. Warszawa, Difin S.A.

Kruger H. (2004), *Metody badań w pedagogice.* Gdańsk, GWP.

Krygowska Z. (1977), *Zarys dydaktyki matematyki. Część I.* Warszawa, WSiP.

Lachowicz-Tabaczek K. (2004), *Potoczne koncepcje świata i natury ludzkiej, ich wpływ na poznanie i zachowanie.* Gdańsk, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.

Leppert R. (1996), *Potoczne teorie wychowania studentów pedagogiki.* Bydgoszcz WSP. Lockhart P. (2009), *Mathematician's lament*. New York, Bellevue Literary Press.

Lu J., Bridges S., Hmelo-Silver C.E. (2014), *Problem-Based Learning*. W: R.K. Sawyer, *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences.* Second edition. New York, NY Cambridge University Press.

Piaget J. (1977), *Dokąd zmierza edukacja.* Warszawa, PWN.

Piaget J. (2006), *Studia z psychologii dziecka*. Warszawa, PWN.

Piotrowska E. (2008), *Społeczny konstruktywizm a matematyka.* Poznań, Wydawnictwo Naukowe UAM.

Makiewicz M. (2013), *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*. Szczecin, Wydział Matematyczno-Fizyczny US.

Marcus G. (2009), *Prowizorka w mózgu*. Sopot, Smak Słowa.

Mason J., Burton L., Stacey K. (2005), *Matematyczne myślenie*. Warszawa, WSiP.

Semadeni Z. (2016), *Podejście konstruktywistyczne do matematycznej edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa, ORE.

Siwek H. (2005), *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowanie w matematyce szkolnej*. Warszawa, WSiP.

Stein S.K. (1997), *Potęga liczb. Matematyka w życiu codziennym*. Warszawa, Wydawnictwo Amber Sp. z o. o.

Such J. (1995), *Wiedza naukowa a wiedza potoczna*. W: B. Kotowa, J. Such (red.), *Kulturowe konteksty poznania.* Poznań, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM.

Such J., Szcześniak M. (2011), *Filozofia nauki*. Poznań, Wydawnictwo Naukowe UAM.

Trzebiński J. (1981), *Twórczość a struktura pojęć.* Warszawa, PWN.

Wood D. (2006), *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*. Kraków, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Wygotski L.S. (1971), *Wybrane prace psychologiczne.* Warszawa, PWN.