PROBLEMY WCZESNEJ EDUKACJI / ISSUES IN EARLY EDUCATION ISSN 1734-1582
1 (40) / 2018 e-ISSN 2451-2230

Monika Czajkowska
Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie
mczajkowska@aps.edu.pl

Beata Bugajska-Jaszczołt
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach
beata@ujk.edu.pl

Umiejętności geometryczne trzecioklasistów w świetle wyników badań

Summary

Geometry abilities of third graders in the light of research outcome

In the article, it was sought to determine the level of third-graders' geometry skills on the basis of the available test results of OBUT, K3 and Omnibus. It was indicated that not only might some geometry learning difficulties arise from the specific nature of mathematical concepts, but from the culture of mathematics teaching as well as application of a traditional methodology of this subject. It was highlighted that the students have too little opportunities to manipulate objects and to gain geometrical experiences. Beginning geometry education with planimetrics was questioned as well.

Słowa kluczowe: geometria, umiejętności uczniów, edukacja wczesnoszkolna

Keywords: geometry, pupils' skills, early childhood education

Uwagi o specyfice nauczania i uczenia się geometrii

Geometria jest tym działem matematyki, który w opinii zarówno wielu nauczycieli, jak i uczniów jest trudny i nielubiany (Bakó 2003: 1). Jak zauważa Duval (1998: 37), sam proces nauczania geometrii jest bardziej skomplikowany i często mniej skuteczny niż np. arytmetyki, czy algebry. Jednym z powodów trudności w uczeniu się i nauczaniu geometrii jest sama specyfika pojęć geometrycznych. Z natury są one abstrakcyjne, a więc istnieją tylko w ludzkich umysłach. W realnym świecie możliwa jest tylko obserwacja i manipulacja przedmiotami będącymi modelami tych pojęć.

Również rysunek geometryczny nie może być traktowany konkretnie i nie można go utożsamiać z abstrakcyjnym pojęciem (Nowik 2011: 148). Właściwe rozumienie rysunku możliwe jest tylko wtedy, gdy jego autor i odbiorca znają i respektują te same umowy, uwzględniające naturę reprezentowanych obiektów matematycznych (Parzysz 1989: 119). Z tego punktu widzenia istotny jest kontekst sytuacji, w której pojawia się rysunek. Na przykład rysunek łamanej zwyczajnej zamkniętej o trzech bokach, w zależności od sytuacji, raz może reprezentować tę łamaną, a raz trójkąt. W przypadku figur nieograniczonych (np. prostej, nieskończonego pasa) rysunek jest tylko reprezentacją ograniczonej części takiej figury, co może być źródłem nieporozumień (Parzysz 1989: 119–120). Co więcej, rysunek geometryczny, statyczny ze swojej natury, często wymaga «specyficznego widzenia» (Panek, Pardała 1999: 65–69), które polega na myślowym manipulowaniu obiektami geometrycznymi. Jest ono podstawową i charakterystyczną cechą rozumowań typu geometrycznego (Swoboda 2012: 19–20). Wsparciem dla „specyficznego widzenia" są odpowiednie intuicje geometryczne (Krygowska 1977; Fischbein 1987; Jones 1998; Fujita i in. 2004; Gruszczyk-Kolczyńska 2015) oraz dobra wyobraźnia (De Lange 1986; Panek, Pardała 1999; Tocki 2000).

W niniejszym artykule, pisząc o *intuicjach geometrycznych*, mamy na myśli łatwość dostrzegania pewnych cech wspólnych obiektów realnych i zależności występujących między tymi obiektami, tworzenia ich myślowych reprezentacji oraz posługiwania się nimi. Są to *intuicje pierwotne*, które objawiają się w postaci nagłego olśnienia, pojawienia się myśli, idei, czy gotowej odpowiedzi na nurtujące pytanie (Krygowska 1977: 131). Na rozwój intuicji geometrycznych niewątpliwie ma wpływ nabywanie wielu doświadczeń z modelami figur geometrycznych, pozwalających dziecku na słuszne przewidywania i przeprowadzanie prostych, czasami nieco naiwnych, rozumowań.

Tocki (2000: 100) odróżnia wyobraźnię przestrzenną od wyobraźni geometrycznej. Jeśli analizujemy obiekty rzeczywiste i stosunki realne za pomocą pojęć geometrycznych, to mówimy o wyobraźni przestrzennej. Posługiwanie się wyobraźnią przestrzenną oznacza konstruowanie w umyśle obrazów (rysunków) badanych obiektów realnych i dokonywanie na nich operacji myślowych odpowiadających tym, które mogą być wykonywane na realnych przedmiotach. Natomiast jeśli uczeń dokonuje geometrycznego modelowania zagadnień z innych działów matematyki lub tworzy dokładne wyobrażenia o abstrakcyjnych figurach geometrycznych bez wykorzystywania rzeczywistości, to posługuje się wyobraźnią geometryczną. Z tych rozważań wynika, że dzieci w klasach początkowych posługują się wyobraźnią przestrzenną.

Prawidłowości kształtowania pojęć i umiejętności geometrycznych

Nieustannie podejmowane są przez dydaktyków matematyki i psychologów próby poszukiwania odpowiednich sposobów opisu kształtowania pojęć matematycznych. Konior (2000: 11) wprost pisze, że „mechanizm ich kreowania przez umysł ludzki, jak i sposoby organizacji tego procesu w szkole, są dalekie od pełnego poznania". Hejny (1997: 17) wyróżnia pięć etapów w procesie tworzenia się nowej (w tym geometrycznej) wiedzy ucznia. Są to: motywacja, etap izolowanych modeli, etap uniwersalnych modeli, podniesienie abstrakcji, etap krystalizacji. W procesie rozwijania pojęć geometrycznych u uczniów (4–15-letnich) Hejny (1997: 21) wyróżnia trzy następujące poziomy: przedpojęciowy, pojęć uosobowionych (personalnych) oraz pojęć socjalnych (społecznych).

Dzieci kończące edukację przedszkolną i rozpoczynające naukę w klasie pierwszej znajdują się, zdaniem Hejny'ego (1997: 21–22) i Gruszczyk-Kolczyńskiej (2009: 375; 2015: 187) na poziomie przedpojęciowym. Trafnie posługują się określeniami kształtu, np. okrągły, trójkątny, wiążąc je ze zbiorem odpowiednich obiektów świata realnego, przy czym żaden z kształtów nie jest traktowany jako indywiduum (Hejny 1997: 22). W trakcie zbierania doświadczeń, dzięki manipulowaniu przedmiotami w podobnym kształcie i ich obserwowaniu, a także rozmawianiu o kształtach, powoli wyłaniają się w dziecięcych umysłach zarysy poszczególnych pojęć geometrycznych. Dzieci kończące edukację wczesnoszkolną nadają niektórym pojęciom status obiektów uosobowionych.

Równolegle z poznawaniem pojęć geometrycznych rozwijają się umiejętności geometryczne dziecka. Każda taka umiejętność związana jest z pewnego rodzaju aktywnością – działaniem, które ujawnia się w kontakcie z modelami obiektów geometrycznych. Hejny (1997: 26–27) wymienia w tym zakresie: obserwowanie, manipulowanie, badanie, werbalizowanie, konstruowanie, kreowanie.

Zakres treści geometrycznych w przedszkolu i klasach 1–3

W klasach 1–3 kształceniu geometrycznemu poświęca się niewiele uwagi. Obecnie nauczanie geometrii ogranicza się do następujących aspektów: 1) określania wzajemnego położenia przedmiotów na płaszczyźnie i w przestrzeni, 2) określania i wytyczania kierunków, 3) rozpoznawania i nazywania modeli podstawowych figur geometrycznych w przestrzeni jednowymiarowej (punkt, prosta, odcinek) lub dwuwymiarowej (kwadrat, prostokąt, trójkąt, koło), 4) wykonywania przekształceń geometrycznych, które nie zmieniają wielkości i kształtu figur (np. symetria osiowa, przesunięcie równoległe) oraz zmieniających proporcjonalnie wielkość (pomniejszanie i powiększanie), 5) pomiarów (długości, masy, objętości cieczy), 6) obliczeń geometrycznych (np. obwodów figur), 7) dostrzegania relacji między figurami. Należy zauważyć, że nauczanie geometrii w klasach 1–3 skupione jest na treściach z planimetrii, natomiast treści z geometrii przestrzennej pojawiają się jedynie w kontekście liczenia lub figur płaskich. Pomimo że uczniowie posługują się modelami brył, to nie poznają terminów ze stereometrii. Przykładowo przyglądając się pudełku (a nie prostopadłościanowi), czy kostce (a nie sześcianowi), rozpoznają kształty ścian tych przedmiotów.

Umiejętności geometryczne dzieci kończących I etap kształcenia w świetle badań

Umiejętności geometryczne nabywane przez dzieci w klasach 1–3 stanowią fundament, na którym w kolejnych latach edukacji szkolnej, nadbudowywana jest ich wiedza geometryczna. Jest to etap, na którym uczniowie powinni, w wyniku manipulowania obiektami konkretnymi a także prowadzenia ukierunkowanych obserwacji i mówieniu o swoich spostrzeżeniach, nabyć odpowiednio dużo doświadczeń enaktywnych i ikonicznych, sprzyjających w dalszej edukacji umiejętności właściwego interpretowania rysunków geometrycznych i wykonywania przekształceń w myśli (Semadeni 2015: 122). Konsekwencją braku lub niewystarczających doświadczeń w tym zakresie może być pojawianie się, na wyższych etapach edukacyjnych, nadmiernych lub specyficznych trudności w uczeniu sie matematyki (Gruszczyk-Kolczyńska 2009: 23–24).

Dlatego istotne jest określenie poziomu umiejętności geometrycznych trzecioklasistów. Analiza sposobów rozwiązywania konkretnego zadania geometrycznego pozwala zaobserwować podejście dzieci do problemu oraz ocenić poziom umiejętności operowania posiadaną wiedzą geometryczną. Dodatkowo dostarcza wielu cennych informacji o typach błędów popełnianych przez uczniów, a czasami o hipotetycznych lub rzeczywistych przyczynach ich pojawiania się.

W dalszej części artykułu omawiamy umiejętności geometryczne dzieci na podstawie raportów z badań edukacyjnych: OBUT i K3 (przeprowadzonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną oraz Instytut Badań Edukacyjnych) oraz Omnibus (przeprowadzonym przez wydawnictwo edukacyjne MAC Edukacja), a także udostępnionych nam wyników tych badań. W przypadku przytaczania informacji zaczerpniętych z raportów i publikacji podajemy źródło ich pochodzenia. Jednak niektóre wyniki nie były wcześniej nigdzie opisane, a ich interpretacje są skutkiem naszych analiz, przemyśleń i refleksji.

Ze względu na ograniczone ramy tego artykułu przedstawiamy tylko część prowadzonych przez nas analiz i porównań, dotyczących wybranych zagadnień geometrycznych.

Rozpoznawanie rysunków figur geometrycznych

W badaniu Omnibus 2016 trzecioklasiści mieli za zadanie wśród podanych czterech rysunków figur wskazać te, które są rysunkami prostokątów. Tylko 32% badanych wykonało poprawnie to zadanie. Odrzucając romb oraz figurę, która nie była wielokątem, wykazali się rozumieniem pojęcia *prostokąt* i znajomością jego podstawowych własności. Jednak dla ok. 37% dzieci kwadrat nadal nie był prostokątem. Co piąty uczeń koncentrował się tylko na kształcie narysowanego obiektu (np. nie zwracał uwagi na to, że figura przedstawiona na rysunku miała „zaokrąglone rogi") (Czajkowska, Szurowska 2016: 18). Podobne wyniki uzyskano w kolejnej edycji badania. Wielu trzecioklasistów rozpoznawało figury geometryczne tylko wtedy, gdy były one położone w uprzywilejowanej pozycji. Na rysunkach trójkąty zostały poprawnie rozpoznane przez 75% badanych, kwadraty – przez 47%, a prostokąty, które nie były kwadratami – przez 59% (Czajkowska, Białek 2017: 23). A zatem znacząca grupa dzieci nie osiągnęła jeszcze poziomu pojęć uosobowionych (zgodnie z charakterystyką podaną przez Hejny'ego).

Przekształcenia izometryczne na płaszczyźnie (symetria, przesuniecie, obrót)

W badaniach OBUT 2014, K3 2015 i Omnibus 2017 znalazły się zadania związane z przekształceniami izometrycznymi na płaszczyźnie. Aż cztery zadania dotyczyły symetrii osiowej, przy czym zróżnicowanie stopnia trudności wynikało z położenia osi symetrii. W jednym należało na podstawie połowy figury osiowo symetrycznej, skonstruować w umyśle tę figurę (Karpiński i in. 2014: 17). Kontekst zadania nawiązywał do sporządzania wycinanki z papieru. Dodatkowo na rysunku zaznaczono, linią przerywaną, pionową oś symetrii. Rozwiązanie zadania nie sprawiło uczniom trudności – poprawną odpowiedź podało aż 86% badanych trzecioklasistów (Karpiński i in. 2014: 17–18). W drugim zadaniu uczniowie również musieli wyobrazić sobie, jak będzie wyglądała wycinanka po jej rozłożeniu. Tym razem jednak na rysunkach nie było pokazanej osi symetrii. Z rozwiązaniem tego zadania poradziło sobie 76% dzieci (Czajkowska, Białek 2017: 23). Kolejne zadanie wymagało tych samych umiejętności co poprzednie, ale kontekst zadania był już inny (Karpiński i in. 2014: 18). Dziecko musiało wyobrazić sobie, jak wygląda po rozłożeniu odcięty róg kartki papieru, złożonej przed cięciem na pół. Poprawnej odpowiedzi udzieliło 68% uczniów. Ok. 19% wskazało na rysunek odciętego narożnika przed jego rozłożeniem (Karpiński i in. 2014: 18–19). W czwartym zadaniu należało skonstruować odbicie symetryczne figury złożonej z jednostkowych kwadratów narysowanych na pokratkowanej kwadratowej kartce. Utrudnieniem było położenie osi symetrii – ukośnie w stosunku do brzegów kartki. Poprawną odpowiedź podało 70% badanych (Zambrowska i in. 2015: 27). To wskazuje na posiadanie przez trzecioklasistów właściwych intuicji związanych z symetrią osiową, nawet w sytuacji kiedy oś symetrii nie jest zorientowana ani poziomo, ani pionowo.

W badaniu K3 2015 pojawiło się zadanie, w którym należało ustalić efekt złożenia przekształceń izometrycznych – obrotu i przesunięcia, a także odbicia symetrycznego, zmieniającego orientację. Rozwiązanie zadania wymagało wykonania myślowych manipulacji – należało wyobrazić sobie ruch pieczątki – figury w kształcie litery L, a następnie stwierdzić, którego z podanych rysunków nie da się otrzymać z jej użyciem. Prawidłową odpowiedź podało tylko 45% uczniów (Zambrowska i in. 2015: 28). Wskazuje to na znaczne trudności uczniów z rozpoznawaniem wzajemnego ułożenia figur oraz z wyobrażaniem sobie czynności manipulowania i efektu działań na konkretach. Dla wielu trzecioklasistów wizualna informacja była niewystarczająca.

Kolejne zadanie zawierało kontekst realistyczny. Dotyczyło specyficznego sposobu ułożenia serwetek (Zambrowska i in. 2015: 29). W celu rozwiązania zadania konieczne było powiązanie procedury ich układania, bądź zdejmowania (kolejności w jakiej były one układane na stosie lub w jaki sposób mogą być zdejmowane z tego stosu) z wiedzą o własnościach kwadratu. A zatem zadanie wymagało od dziecka rozpoznawania obiektów, na podstawie świadomie organizowanych danych cząstkowych (widocznych fragmentów serwetek). Z rozwiązaniem tego zadania poradziła sobie nieco ponad połowa (51%) badanych uczniów (Zambrowska i in. 2015: 29).

Pomiar długości odcinków

Zarówno w obu edycjach badania Omnibus, jak i badaniu OBUT 2013 zamieszczono zadania dotyczące pomiaru długości odcinków. W badaniu Omnibus zadania były typowe, sprawdzające podstawowe umiejętności. Uczniowie uczestniczący w tym badaniu w 2016 r. mieli zmierzyć długości czterech odcinków. Dokonując pomiaru za pomocą linijki, mogli samodzielnie dobrać jednostkę. W przypadkach, w których długości odcinków wyrażone w centymetrach były liczbami naturalnymi, odsetki poprawnych odpowiedzi kształtowały się na poziomie ok. 95%. Natomiast, gdy odcinek miał długość np. 45 mm, zadanie wykonało poprawnie ok. 80% badanych. Nieco niższe wyniki uzyskali uczniowie w przykładach, w których należało narysować odcinki dłuższe lub krótsze od wskazanego odcinka o podaną liczbę centymetrów. Odsetki poprawnych odpowiedzi wahały się od 74% do 79%. Podobne wyniki uzyskano w kolejnej edycji badania (Czajkowska, Białek 2017: 23).

Zadanie użyte w badaniu OBUT 2013 było nietypowe. Uczniowie mieli podać, jaką łączną długość będzie miała słomka powstała z dwóch mniejszych słomek (każda o długości 13 cm), poprzez wsunięcie jednej z nich w drugą na głębokość 2cm. Zadanie to poprawnie rozwiązało prawie 56% badanych. Często pojawiające się błędy spowodowane były dodaniem do siebie długości dwóch słomek bez uwzględnienia skutku wsunięcia jednej słomki w drugą (Brożek i in. 2013: 22).

Obliczanie obwodów wielokątów

W badaniu OBUT w 2013 r. wystąpiło zadanie, w którym narysowane były dwie figury o tych samych obwodach: prostokąt o wymiarach 1 cm na 5 cm i trójkąt równoboczny. Uczeń miał obliczyć długość boku trójkąta. Nieco ponad 64% trzecioklasistów rozwiązało to zadanie poprawnie. Warto zauważyć, że niektórzy uczniowie, którzy podali błędną odpowiedź, dokonywali pomiaru długości boków narysowanego trójkąta i liczyli obwód sumując wyniki swoich pomiarów (Brożek i in. 2013: 17–18). Jednym z powodów takiej sytuacji może być to, że uczniowie nie rozpoznali właściwie roli, jaką pełnił rysunek w danym zadaniu. Znacząco gorzej trzecioklasiści poradzili sobie z zadaniem, w którym należało nie tylko wykazać się umiejętnością liczenia obwodu kwadratu, ale także stosowania jej w nietypowych sytuacjach. Dzieci miały obliczyć obwód kwadratu odciętego z prostokąta o wymiarach 3 cm ´ 8 cm. Zadanie poprawnie rozwiązało 33,4% uczniów. Wśród błędnych odpowiedzi pojawiały się dwa rodzaje rozwiązań: uczeń obliczył obwód narysowanego prostokąta i na tym przestał lub odmierzył połowę dłuższego boku prostokąta i tam dokonał «cięcia», otrzymując prostokąt, a nie kwadrat (Brożek i in. 2013: 18–19).

W jednym z zadań w badaniu K3 2015 na bokach trójkąta równobocznego zbudowane zostały kwadraty o obwodach 20 cm. Należało wyznaczyć obwód trójkąta. Poprawną odpowiedź wskazało 62% badanych (Zambrowska i in. 2015: 33). W innym zadaniu na pokratkowanej kartce narysowano prostokąt częściowo zasłonięty „kleksem”. Dzieci miały policzyć obwód tego prostokąta, znając długość boku kratki. Większość (73%) uczniów rozwiązała to zadanie poprawnie. Jednak ok. 20% użyło linijki i dokonało własnych pomiarów boków prostokąta.

W badaniu Omnibus z 2017 r. użyto zadania, w którym uczniowie mieli w kategoriach prawda – fałsz ocenić prawdziwość trzech zdań dotyczących długości boków i obwodu prostokąta, zbudowanego z jednakowych kwadratów o znanej długości boku. Odsetki poprawnych odpowiedzi w tym zadaniu wahały się od 47% do 75% (Czajkowska, Białek 2017: 23).

Obliczanie pól prostokątów poprzez zliczanie figur jednostkowych
W badaniu Omnibus 2016 pojawiło się zadanie sprawdzające intuicje dzieci związane z pojęciem pola figury. Zadanie to było osadzone w kontekście praktycznym. Trzecioklasiści mieli wskazać najmniejszą liczbę prostokątnych płyt, którymi można wyłożyć plac w kształcie kwadratu, kładąc płyty obok siebie. Zarówno wymiary placu, jak i płyty były tak dobrane, aby było to możliwe, bez konieczności „cięcia" płyt. Zadanie zawierało wykonane w skali rysunki płyty i placu, po to, aby uczeń mógł zaplanować i narysować „wyłożenie" placu płytami. Ok. 47% dzieci wykonało poprawnie to zadanie, 44% – błędnie, a 9% w ogóle nie podjęło próby jego rozwiązywania.

Podział figury lub budowanie figury z innych figur
W jednym z zadań w badaniu OBUT 2014 opisano sytuację, w której z trzech wyciętych z papieru modeli figur geometrycznych: prostokąta, kwadratu, trójkąta, zrobiono układankę. Dzieci miały rozpoznać, który rysunek przedstawia figurę, której nie można ułożyć z tych trzech modeli (Karpiński i in. 2014: 19). Zadanie to poprawnie rozwiązało 57% badanych trzecioklasistów.

W badaniu Omnibus 2016 wystąpiły dwa zadania dotyczące podziału figury na inne. Pierwsze z nich kierowane było do wszystkich uczniów. Znając długości boków trójkąta prostokątnego mieli stwierdzić, czy prostokąt ułożony z dwóch takich trójkątów będzie miał wskazany obwód. Niecałe 50% uczniów poradziło sobie z tym zadaniem. Drugie zadanie rozwiązywali tylko uczniowie uzdolnieni matematycznie. Mieli ustalić na ile części zostanie podzielona kartka papieru, która została złożona na pół i przecięta tak, jak to pokazano na rysunku. Jedynie 23% uczniów podało poprawną odpowiedź. Możliwe, że dzieci nie potrafiły wyobrazić sobie sytuacji opisanej w zadaniu. Co więcej, prawdopodobnie nie skorzystały z możliwości wykonania tego ćwiczenia, choć w badaniu Omnibus uczniowie mieli do dyspozycji różne środki dydaktyczne i w dowolnym momencie mogli ich użyć. Świadczyć to może o niewystarczającym doświadczeniu w zakresie wykonywania konkretnych czynności na realnych przedmiotach.

Podsumowanie

Zdecydowana większość dzieci biorących udział w wymienionych badaniach poradziła sobie z rozwiązaniem typowych i prostych zadań geometrycznych. Na przykład bezbłędnie dokonywały one za pomocą linijki pomiaru długości odcinka w centymetrach, gdy wyrażała się ona liczbą naturalną. Na ogół poprawnie obliczały obwód prostokąta lub trójkąta, gdy dane były długości jego boków. Prawidłowo rozpoznawały i rysowały drugą połowę figury osiowosymetrycznej. Dobrze radziły sobie też z niektórymi zadaniami, których programowo nie rozwiązuje się w szkole. To oznacza, że dzieci mają dobre pierwotne intuicje geometryczne.

Jednak dla znaczącej grupy trzecioklasistów kwadrat nie był prostokątem. Natomiast figury, które nie były wielokątami i tylko pozornie swoim kształtem przypominały prostokąt, na podstawie pobieżnego oglądu, uznawane były za prostokąty. Możliwe jest zatem, że w toku nauczania tych zagadnień zbyt mało uwagi poświęcono na analizę tzw. skrajnych przypadków lub też znacząca grupa dzieci nie jest jeszcze na poziomie pojęć uosobowionych.

Trzecioklasiści często nie radzili sobie w zadaniach, w których należało wykonywać obrót i przesunięcie. Zwykle mniej niż połowa badanych potrafiła sobie wyobrazić te przekształcenia. Trudności pojawiały się także wtedy, gdy integralną częścią zadania był rysunek. Uczniowie, którzy nie rozpoznali prawidłowo roli rysunku, dokonywali pomiaru długości odcinków figury przedstawionej na ilustracji, co zazwyczaj prowadziło do błędnego rozwiązania. Odczytywanie roli rysunku w zadaniu matematycznym jest złożoną aktywnością, wymagającą m.in. interpretowania i przetwarzania informacji. Jak pokazują badania, uczniowie zarówno na pierwszym (Bugajska – Jaszczołt, Czajkowska 2013), jak i na kolejnych etapach edukacyjnych (Czajkowska 2004) napotykają trudności w tym zakresie.

Powyższe analizy mogą świadczyć o tym, że uczniowie nie mieli zbyt wielu okazji do gromadzenia doświadczeń w sytuacjach manipulacyjnych. Może to być wynikiem stosowania przestarzałej, skostniałej metodyki edukacji matematycznej i kultury nauczania matematyki. Pomimo różnych badań nad kształtowaniem się pojęć matematycznych w umysłach dzieci, prowadzonych w Polsce i na świecie oraz dotychczasowych ustaleń w tym zakresie (opisanych m.in. w pracach: Czaplewska (1998), Gruszczyk-Kolczyńska (2009, 2015), Hejny (1997), Semadeni i in. (2015), Swoboda (2006)), szkoleń nauczycieli, nadal edukacja matematyczna jest prowadzona w tradycyjny sposób (Czajkowska i in. 2015; Karpiński, Zambrowska, 2015). W praktyce geometria szkolna w klasach 1–3 skoncentrowana jest na wyizolowanych kształtach geometrycznych, najczęściej prezentowanych w typowych sytuacjach i położeniach, opanowaniu techniki mierzenia długości odcinków za pomocą linijki, a także mechanicznemu opanowaniu przez dzieci techniki obliczania obwodu poznanych prostokąta, kwadratu, trójkąta. Taki sposób pracy nie sprzyja „tworzeniu w myśli wyobrażeń o abstrakcyjnych figurach i związkach między nimi bez wykorzystywania ich realnych modeli (wyobraźnia geometryczna) oraz rozwijaniu specjalnego rodzaju przeczucia (wglądu), które pozwala wychwycić sens lub ogarnąć strukturę sytuacji (układ stosunków w niej występujących), podjąć działanie lub dostrzec przykład (intuicja geometryczna)" (Treliński, Trelińska 1996: 8). A zatem dzieci w klasach początkowych nie mają optymalnych warunków do tworzenia intuicji geometrycznych i rozwijania wyobraźni. Podobnego zdania są Klus-Stańska i Kalinowska (2004: 80) oraz Dąbrowski (2013: 113).

Gruszczyk-Kolczyńska (2009: 31–32) podkreśla, że taka sytuacja jest efektem preferowania w procesie dydaktycznym tzw. papierowej matematyki. Zastąpienie manipulowania przedmiotami obrazkami w podręczniku ogranicza materiał, który można przekształcać i poddawać badaniom. Oglądając jedynie obrazki, dziecko nie nabywa odpowiednich doświadczeń geometrycznych. Kluczowe znaczenie dla tworzenia intuicji geometrycznych i rozwijania wyobraźni przestrzennej ma bowiem operowanie modelami figur – ich samodzielne wykonywanie (np. wycinanie z papieru, lepienie z plasteliny) i manipulowanie nimi ukierunkowane na badanie własności. Istotne są także przekształcenia geometryczne – symetria osiowa (wskazywanie figur osiowosymetrycznych, obserwowanie lustrzanego odbicia narysowanej figury), symetria obrotowa (rozety), przesunięcia (ornamenty, mozaiki, układanki) oraz podobieństwo (powiększanie i pomniejszanie). Wskazane jest aby dzieci wykonywały te przekształcenia, obserwowały zachodzące zmiany i opowiadały o nich. Zagadnieniom tym, niestety, nie poświęca się w szkole wystarczającej uwagi i traktuje się je marginalnie (Karpiński i in. 2014: 21).

Można przypuszczać, że zmiana metodyki edukacji matematycznej może znacząco przyczynić się do poprawy wiedzy i umiejętności geometrycznych uczniów. Tezę tę częściowo potwierdzają obserwacje systemów kształcenia geometrycznego w innych krajach, np. w Japonii, która w testach PISA, TIMSS zajmuje czołowe pozycje pod względem osiągnięć matematycznych uczniów. W Japonii naukę geometrii rozpoczyna się od zapoznania z modelami podstawowych brył, w trakcie manipulowania różnorodnymi przedmiotami, np. opakowaniami, klockami, pudełkami i innymi przedmiotami codziennego użytku. Te doświadczenia są przyczynkiem do wprowadzenia i nazywania figur płaskich (Mączka 2016: 86–90). Japońscy nauczyciele nie wyjaśniają dzieciom zagadnień, nie instruują jak rozwiązać zadanie, a jedynie dobierają problemy, moderują dyskusje, stawiają stymulujące do myślenia pytania. Za niewłaściwe pytania uznają te, na które uczniowie mogą natychmiast odpowiedzieć (Mączka 2016: 87).

Wobec ujawnionych niedostatków obecnego modelu kształcenia geometrycznego w nauczaniu początkowym warto podjąć dyskusję na temat metodyki nauczania geometrii w klasach 1–3.

Literatura

Bakó M. (2003), *Different projecting methods in teaching spatial geometry*. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Bako_cerme3.pdf, 26.02.2016.

Brożek A., Dobkowska J., Kondratek B., Nowakowska A., Paszkiewicz A., Pregler A., Puchalska A., Sosulska D., Sułowska A., Zambrowska M. (2013), *Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów OBUT 2013*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Bugajska – Jaszczołt B., Czajkowska M. (2013), *Komunikacja na zajęciach z edukacji matematycznej*. „Problemy Wczesnej Edukacji" 4(23).

Czajkowska M. (2004), *Refleksja nad rozwiązaniem zadania przeznaczonego dla uczniów zainteresowanych matematyką*. „Nauczyciele i Matematyka" (52).

Czajkowska M., Białek K. (2017), *Umiejętności polonistyczne i matematyczne trzecioklasistów. Raport ze Sprawdzianu Kompetencji Trzecioklasisty Omnibus 2017.* Kielce, Wydawnictwo MAC Edukacja. https://www.mac.pl/omnibus, 30.06.2017.

Czajkowska M., Grochowalska M., Orzechowska M. (2015), *Potrzeby nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Czajkowska M., Szurowska B. (2016), *Umiejętności polonistyczne i matematyczne trzecioklasistów. Raport ze Sprawdzianu Kompetencji Trzecioklasistów Omnibus 2016*. Kielce, Wydawnictwo MAC Edukacja.

https://www.mac.pl/aktualnosci/raport-z-omnibusa-ju-do-pobrania, 15.12.2016.

Czaplewska E. (1998), *Rozwój kompetencji w zakresie orientacji przestrzennej u dzieci od lat trzech do ośmiu*. Niepublikowana rozprawa doktorska. Akademia Pedagogiki Specjalnej w Warszawie.

Dąbrowski M. (2013), *(Za)trudne, bo trzeba myśleć*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Duval R. (1998), Geometry from a cognitive point of view. In: Mammana C. & Villani V. (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Kluwer: Academic Publisher.

Fischbein E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics: an educational approach*. Dordrecht, Reidel.

Gruszczyk-Kolczyńska E. (red.) (2009), *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji. Cele i treści kształcenia, podstawy psychologiczne i pedagogiczne oraz wskazówki do prowadzenia zajęć z dziećmi w domu, w przedszkolu i w szkole*. Warszawa, Wydawnictwo Edukacja Polska.

Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (2015), *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później*. Kraków, Wyd. Bliżej Przedszkola.

Hejny M. (1997), *Rozwój wiedzy matematycznej*. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Dydaktyka Matematyki”, 19.

Fujita T., Jones K. & Yamamoto S. (2004), Geometrical Intuition and the Learning and Teaching of Geometry. In: *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10), Topic Study Group 10 (TSG10) on Research and Development in the Teaching and Learning of Geometry.* Copenhagen, Denmark. http://eprints.soton.ac.uk/14687/1/Fujita_Jones_Yamamoto_ICME10_TSG10_2004.pdf.

Jones K. (1998), *Deductive and Intuitive Approaches to Solving Geometrical Problems*. In: Mammana C. & Villani V. (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Kluwer: Academic Publisher.

Karpiński M., Nowakowska A., Orzechowska M., Sosulska D., Zambrowska M. (2014), *Raport z ogólnopolskiego badania umiejętności trzecioklasistów OBUT 2014*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Karpiński M., Zambrowska M. (2015), *Nauczanie matematyki w szkole podstawowej*. *Raport z badania*. http://www.ibe.edu.pl, 20.02.2017.

Kalinowska A., Klus-Stańska D. (2004), *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*. Warszawa, Wyd. Akadem. Żak.

Konior J. (2002), *Czym jest pojęcie matematyczne (szkic z perspektywy nauczania i uczenia się)*. W: J. Żabowski (red.), Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, Płock.

Krygowska Z. (1977), *Zarys dydaktyki matematyki. Część 1.* Warszawa, WSiP.

De Lange J. (1986), *Geometria dla wszystkich, czy w ogóle nie geometria*? „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria V Dydaktyka Matematyki” (6).

Nowik J. (2011), *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*. Opole, Wydawnictwo Nowik.

Mączka M. (2016), *Pierwsze spotkania uczniów z geometrią – jak to robią Japończycy?,* „Matematyczna Edukacja Dzieci”, 1.

Panek D., Pardała A. (1999), Diagnozowanie wyobraźni przestrzennej uczniów i studentów. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria V Dydaktyka Matematyki”, 21.

Parzysz B. (1989), „Widzieć” i „Wiedzieć”. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria V Dydaktyka Matematyki” (11).

Pregler A., Wiatrak E. (red.) (2012), *Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów. Raport z badania OBUT 2012*. Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Semadeni Z., Gruszczyk Kolczyńska E., Treliński G., Bugajska- Jaszczot B., Czajkowska M. (2015), *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*. Kielce, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP.

Swoboda E. (2006), *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci*. Rzeszów, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Swoboda E. (2012), *Dynamic reasoning in elementary geometry – how to achieve it?* „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria V Dydaktyka Matematyki” (34).

Tocki J. (2000), *Struktura procesu kształcenia matematycznego*. Część 1. Rzeszów, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej.

Treliński G., Trelińska U. (1996), *Kształtowanie pojęć geometrycznych na etapie przeddefinicyjnym*. Kielce, Wydawnictwo Mat i Met.

Zambrowska M., Karpiński M. i Kondratek B. (2015), *Kompetencje matematyczne trzecioklasistów*. http://www.ibe.edu.pl, 20.02.2017.