PROBLEMY WCZESNEJ EDUKACJI / ISSUES IN EARLY EDUCATION ISSN 1734-1582
2 (55) / 2022 ISSN 2451-2230 (online)

Beata Bugajska-Jaszczołt
ORCID: 0000-0002-9605-3339
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach
beata.bugajska-jaszczolt@ujk.edu.pl

https://doi.org/10.26881/pwe.2022.55.09

Monika Czajkowska
ORCID: 0000-0003-2162-304X
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach
monika.czajkowska@ujk.edu.pl

Rozwiązywanie zadań tekstowych przez studentów – przyszłych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej

Summary

Solving textual tasks by students – future lower primary teachers

The results of the research aimed at diagnosing the ability to solve textual tasks by the students – candidates for lower primary teachers are presented in the article. The research was carried out between the years 2017 and 2019. It comprised 392 students of pedagogy with teaching specialization. The main research method was a competency test, and the technique was document analysis. The research shows that the students have well-mastered calculational algorithms and techniques but they have difficulties in presenting their reasoning in the language of mathematics. A large group of students strive to write down the solution in the form of a ready mathematical formula, without representing the situation on a drawing/diagram or manipulating on concretes to help them solve the problem.

Keywords: lower primary education students, text tasks, students' mathematical skills

Słowa kluczowe: studenci edukacji wczesnoszkolnej, zadania tekstowe, umiejętności matematyczne studentów

Kompetencje matematyczne i dydaktyczne nauczycieli

Powszechnie wiadomo, że nauczyciele, którzy zajmują się nauczaniem matematyki – i mamy tu na myśli nie tylko nauczycieli matematyki, ale także nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej – powinni mieć odpowiednie kompetencje matematyczne i dydaktyczne. Pojęcie kompetencji matematycznych jest bardzo obszerne i w zależności od kontekstu może być różnie opisywane. Na przykład w latach 60. ubiegłego wieku Zofia Krygowska (1979) wyraziła je w języku aktywności matematycznych, wymieniając: dostrzeganie i wykorzystywanie analogii, matematyzację (której jednym z etapów jest schematyzowanie), definiowanie (interpretowanie danej definicji i używanie racjonalnie danej definicji), dedukowanie i redukowanie (konstruowanie i posługiwanie się w racjonalny sposób językiem symbolicznym), posługiwanie się językiem matematycznym, algorytmami), formułowanie i rozwiązywanie problemów. Z kolei Mogens Niss określił kompetencję matematyczną jako „zdolność rozumienia, osądzania, wykonywania i wykorzystywania matematycznych czynności w kontekście matematycznym i pozamatematycznym" (2011: 17–18). Dalej wymienił składowe kompetencji matematycznej, do których zaliczył: 1) myślenie matematyczne; 2) stawianie i rozwiązywanie problemów matematycznych; 3) modelowanie matematyczne; 4) rozumowanie matematyczne; 5) reprezentowanie bytów matematycznych; 6) posługiwanie się matematyczną symboliką i formalizmami; 7) komunikowanie się w matematyce, o matematyce i z użyciem matematyki; 8) używanie środków pomocniczych i narzędzi (Niss 2003: 218–219, 2011: 18–20). Warto tu dodać, że Aleksandra Różańska (2016: 194) wykazała związek między przytoczonymi ujęciami, przyporządkowując wymienionym przez Krygowską aktywnościom wskazane przez Nissa składowe kompetencji matematycznej.

Również kompetencje dydaktyczne są w literaturze różnie określane. Jan Jakóbowski pisze, że są one ściśle powiązane z przygotowaniem się nauczyciela do zajęć oraz z przebiegiem tych zajęć. Składa się na nie wiele umiejętności: 1) formułowanie celów i zadań; 2) działanie, planowanie, gromadzenie i przygotowanie do lekcji materiału rzeczowego; 3) poprawne planowanie lekcji; 4) realizacja zaplanowanego materiału; 5) indywidualizacja pracy uczniów w procesie dydaktycznym; 6) wielostronne i możliwie obiektywne ocenianie uczniów; 7) wyposażanie uczniów w możliwie najbardziej skuteczne sposoby i techniki samodzielnego zdobywania wiedzy (Jakóbowski 1973: 13–15). Wacław Strykowski wskazuje, że kompetencje dydaktyczne dotyczą „wiedzy operacyjnej na temat istoty, zasad i metod realizacji procesu kształcenia" (2005: 22). Podobnie określają je Ilona Żeber-Dzikowska, Małgorzata Wysocka-Kunisz i Aleksandra Szydłowska (2016: 96). Monika Czajkowska (2016: 51) przez kompetencję dydaktyczną rozumie ogólną zdolność do organizowania procesu nauczania i uczenia się. Pisze, że jej składowymi są m.in.: 1) wiedza o prawidłowościach rozwojowych człowieka; 2) znajomość podstawy programowej i programów nauczania; 3) umiejętność dokonywania krytycznej analizy materiałów dydaktycznych; 4) umiejętność planowania lekcji (pojedynczej lekcji lub cyklu lekcji); 5) umiejętność odbierania informacji od ucznia i przekazywania mu informacji zwrotnej; 6) umiejętność oceny pracy ucznia; 7) umiejętność pracy z uczniami o różnych potrzebach edukacyjnych (Czajkowska 2016).

Warto zauważyć, że dla efektywności procesu nauczania samo posiadanie kompetencji matematycznych, podobnie jak posiadanie kompetencji dydaktycznych, nie jest wystarczające. Konieczne jest ich zintegrowanie (Shulman 1986: 9–11) lub „nadbudowanie" na kompetencjach matematycznych i dydaktycznych nowej wiedzy i umiejętności o zupełnie nowej jakości (Czajkowska 2016: 52).

Należy podkreślić, że kompetencje matematyczne stanowią fundament skutecznego nauczania matematyki. Nie jest bowiem możliwe, aby nauczyciel, który sam nie ma odpowiedniej wiedzy i umiejętności matematycznych, mógł pomóc uczniom w ich zrozumieniu i opanowaniu (Ball i in. 2008: 404). Co więcej, jak wynika z badań, wysokie kompetencje matematyczne nauczyciela wspierają rozwój jego kompetencji dydaktycznych, a deficyty w kompetencjach matematycznych mogą ten rozwój hamować (Krauss i in. 2008: 722–724; Baumert i in. 2010: 166–167). Relatywnie często nauczyciele o wysokich kompetencjach matematycznych, rozumiejący sens pojęć matematycznych, potrafią dokonać elementaryzacji wiedzy matematycznej i wyrazić myśl matematyczną w języku zrozumiałym dla uczniów (Shulman 1987; An i in. 2004). Natomiast wysokie kompetencje dydaktyczne nie mogą zrównoważyć braków w kompetencjach matematycznych (Krauss i in. 2008: 722–724; Baumert i in. 2010: 166–167).

Według wyników badań wielu czynnych nauczycieli klas I–III ma zbyt małą wiedzę i niewystarczające umiejętności matematyczne (Czajkowska i in. 2015: 13–15). Co więcej, w umiarkowanym stopniu zgłaszają potrzebę uczestniczenia w szkoleniach, które mogłyby podnieść ich kompetencje matematyczne. Należy tu dodać, że taką potrzebę sygnalizują głównie ci, których kompetencje matematyczne są na wysokim poziomie. Są oni bowiem świadomi niedostatków swojej wiedzy i umiejętności matematycznych. Natomiast ci, których kompetencje matematyczne są na niskim poziomie, nie odczuwają takiej konieczności i nie dostrzegają swoich braków zarówno w obszarze samej matematyki, jak i metodyki tego przedmiotu (Czajkowska i in. 2015: 25–26).

Z kolei przegląd ofert szkoleniowych dla nauczycieli wskazuje, że relatywnie rzadko pojawiają się propozycje wykładów czy warsztatów, których celem byłoby podniesienie kompetencji matematycznych nauczycieli klas I–III. Można zatem postawić hipotezę, że wielu nauczycieli klas I–III ma zbliżony poziom wiedzy i umiejętności matematycznych do tego, który wynieśli z okresu studiów. Dlatego postanowiłyśmy bliżej przyjrzeć się kompetencjom matematycznym studentów, którzy w przyszłości, być może, będą się zajmować edukacją matematyczną w klasach I–III. W szczególności chciałyśmy się dowiedzieć, jak studenci rozwiązują zadania tekstowe stanowiące jeden z ważnych obszarów wczesnoszkolnej edukacji matematycznej. To właśnie przy okazji zadań tekstowych – jak twierdzi Mirosław Dąbrowski – „dziecko uczy się modelowania matematycznego, tworzy i stosuje różne reprezentacje, buduje strategie, czyli realizuje podstawowe cele kształcenia matematycznego” (2013: 35). Nabywanie kompetencji matematycznych przez uczniów w toku rozwiązywania zadań wymaga od nauczyciela takiego organizowania procesu uczenia się, w którym uczeń jest stroną aktywną, samodzielnie poszukującą, badającą i wyciągającą wnioski z własnej działalności (Semadeni i in. 2015; Dudel, Głoskowska-Sołdatow 2020: 22).

Metodologia badań

Celem przeprowadzonych badań była diagnoza umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych przez studentów – przyszłych nauczycieli klas I–III. Poszukiwałyśmy odpowiedzi na następujące pytania badawcze:

– Jaki jest poziom czytania ze zrozumieniem przez studentów tekstów zadań matematycznych? Czy studenci rozumieją opisane w zadaniach sytuacje?
– Czy studenci potrafią rozwiązać zadania tekstowe przeznaczone dla uczniów klas III szkół podstawowych metodami elementarnymi, dostępnymi uczniom?
– Czy w trakcie rozwiązywania zadań studenci wykorzystują rysunki, a jeśli tak, to jakie – przedmiotowe czy schematyczne?
– Jakim językiem – formalnym czy czynnościowym – studenci posługują się w zapisie rozumowania?
– Czy studenci znają i stosują algorytmy i techniki obliczeniowe? Czy ich sprawności rachunkowe są na wystarczającym poziomie?

Badania przeprowadziłyśmy w latach 2017–2019 wśród studentów, z którymi miałyśmy zajęcia. Łącznie w badaniach uczestniczyło 392 studentów kierunku pedagogika, specjalności nauczycielskiej, studiujących na Uniwersytecie Jana Kochanowskiego w Kielcach oraz w Akademii Pedagogiki Specjalnej w Warszawie. Byli wśród nich zarówno studenci studiów stacjonarnych, jak i niestacjonarnych. Główną zastosowaną przez nas metodą badawczą był test kompetencji, a techniką – analiza dokumentów (analiza prac zawierających rozwiązania zadań).

W badaniach użyłyśmy zestawu ośmiu zadań tekstowych, które studenci mieli rozwiązać w ciągu 90 minut metodami dostępnymi uczniom klas III szkoły podstawowej. W trakcie rozwiązywania studenci mogli korzystać z dostępnych w sali dydaktycznej środków do manipulacji. Oto zadania użyte w badaniach:

Zadanie 1. Daria ma o 8 naklejek więcej niż Magda. Obie dziewczynki mają razem 36 naklejek. Ile naklejek ma każda dziewczynka?

Zadanie 2. W jednym koszu jest 13 jabłek, a w drugim 21. Ile jabłek należy przełożyć z drugiego kosza do pierwszego, aby w obu koszach było ich po tyle samo?

Zadanie 3. Trzy piłki i cztery skakanki kosztują 69 zł. Jedna piłka i cztery skakanki kosztują 39 zł. Ile złotych kosztuje jedna piłka, a ile – jedna skakanka?

Zadanie 4. Tyczki są ustawione w równych odstępach. Pierwsza tyczka oznacza start, a szesnasta metę. Zawodnik każdą z odległości między tyczkami pokonywał w tym samym czasie. Do dziewiątej tyczki dobiegł w 72 sekundy. W jakim czasie zawodnik przebiegł cały dystans?

Zadanie 5. Jajka pakuje się w wytłaczanki po 6 lub po 10 jajek. Dobierz wytłaczanki różnych wielkości tak, aby zapakować w nie 82 jajka i aby żadne miejsce w wytłaczance nie zostało puste. Podaj wszystkie możliwości.

Zadanie 6. Na trzech półkach stały książki. Sylwia przestawiła dwie książki z najwyższej półki na środkową, a Kuba przestawił trzy książki ze środkowej półki na najniższą. Teraz na każdej półce jest po sześć książek. Ile książek było na początku na każdej półce?

Zadanie 7. Tomek stoi za Basią w dość długiej kolejce po bilety. Między nimi stoi 7 osób. Za Basią stoi 16 osób i przed Tomkiem 13 osób. Ile osób stoi w tej kolejce? Przedstaw swoje rozumowanie.

Zadanie 8. W zawodach bierze udział 10 uczniów. Na wykonanie zadania każdy z uczniów ma 20 minut. Pierwszy uczeń rozpoczyna wykonywanie zadania o godz. 8:30. Każdy kolejny uczeń rozpoczyna pracę po sześciu minutach od momentu rozpoczęcia wykonywania zadania przez poprzedniego ucznia. O której godzinie zakończy pracę ostatni uczeń?

Zadania 1, 5 i 6 ułożyłyśmy samodzielnie, choć zadania o podobnej fabule, analogicznej konstrukcji i sposobach rozwiązania można znaleźć w wielu podręcznikach lub narzędziach badań edukacyjnych. Zadanie 2 zostało zaczerpnięte z badania OBUT 2014 (Ogólnopolskie Badania Umiejętności Trzecioklasistów, por. Karpiński i in. 2014), ale zmieniłyśmy syntaktykę i dane liczbowe. Zadanie 3 pochodzi z badania umiejętności trzecioklasistów Omnibus. Zadanie 7 zostało użyte w projekcie Szkoła samodzielnego myślenia, zmieniłyśmy jednak niektóre dane liczbowe. Zadanie 4 znajduje się na różnych stronach internetowych, natomiast zmieniłyśmy dane liczbowe i nieco syntaktykę tego zadania, pozostawiając niezmienioną fabułę. Zadanie 8 nie jest naszego autorstwa, nie potrafimy jednak określić źródła jego pochodzenia. W zestawie znalazły się zarówno zadania klasyczne, o znanych sposobach rozwiązywania, ale też takie, w których student musiał odejść od schematów i obrać nową drogę rozwiązania problemu czy też sprawnie radzić sobie z danymi, które pozostawały w krzyżujących się związkach. Każde z zadań użytych w narzędziu badawczym można było rozwiązać co najmniej kilkoma sposobami, przy czym zawsze przynajmniej jedna z metod była metodą dostępną uczniom klas III.

Prowadząc analizy, skupiłyśmy się na obszarze procesualnym rozwiązań – reprezentacjach sytuacji zadaniowych, wyborze strategii, wdrożeniu planu znalezionego rozwiązania, interpretacji wyniku. Analizie poddałyśmy również jasność i klarowność przedstawionego rozwiązania oraz poprawność zapisów matematycznych. W trakcie prowadzonych analiz zastosowałyśmy kodowanie trzycyfrowe. Każdemu rozwiązaniu zadania przypisałyśmy trzycyfrowy kod. Pierwsza cyfra kodu wskazywała, czy jest to rozwiązanie poprawne, częściowo poprawne czy błędne. Była równocześnie informacją o liczbie punktów przyznanych studentowi za rozwiązanie zadania. Druga cyfra kodu informowała o sposobie rozwiązania zadania. Trzecia cyfra wskazywała, czy podczas rozwiązywania zadania student posłużył się rysunkiem.

Wyniki badań

Zastosowanie trzycyfrowego kodu pozwoliło nam zarówno na zwięzłe opisanie stopnia poprawności przedstawionych rozwiązań, różnych podejść studentów do zadań, jak i na ustalenie łącznej sumy punktów uzyskanych przez studentów.

Za poprawne uznawałyśmy takie rozwiązanie, w którym student zastosował poprawną metodę (bez względu na to, czy była ona dostępna uczniom klas trzecich czy też nie) i podał poprawny wynik. Rozwiązanie zadania mogło być przedstawione opisowo, na rysunku lub w postaci działań matematycznych. Jeżeli student nie zapisał odpowiedzi do zadania, ale zaznaczył ją w inny sposób (np. otaczając kółkiem, podkreślając, zaznaczając kolorem), to takie rozwiązanie uznawałyśmy za poprawne. Za rozwiązanie częściowo poprawne uznawałyśmy takie, w którym student: 1) zastosował poprawną metodę, ale popełnił błąd rachunkowy lub błąd nieuwagi; 2) nie podał wszystkich możliwości (w zadaniu, w którym polecenie polegało na wypisaniu wszystkich możliwości); 3) poprawnie rozpoczął rozwiązywanie zadania i wykonał kilka koniecznych kroków na drodze jego rozwiązywania, ale nie dokończył pracy lub dalsza część zawiera błędy merytoryczne; 4) podał tylko poprawny wynik, nie prezentując zastosowanej metody. Za rozwiązanie błędne uznawałyśmy takie, w którym student: 1) zastosował błędną metodę; 2) błędnie zrozumiał sytuację opisaną w zadaniu; 3) podał skreślone, zamazane rozwiązanie. Za opuszczone zadanie uznałyśmy takie, w którym student nie zostawił żadnych śladów, że zajmował się zadaniem. Szczegółowe informacje dotyczące poprawności rozwiązań zadań zamieściłyśmy w tabeli 1.

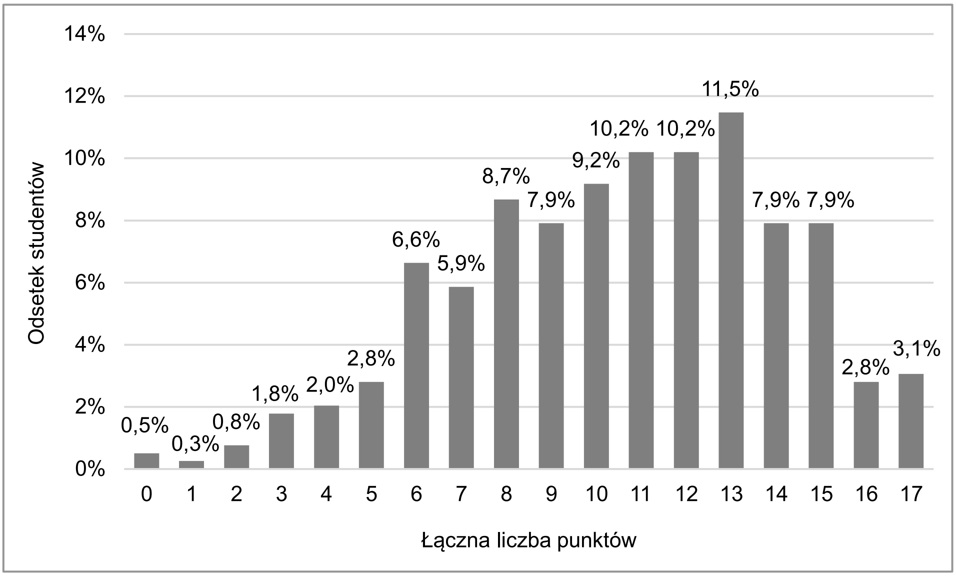
Tabela 1. Poprawność rozwiązań zadań (N = 392)

Zadanie	Rozwiązanie				Opuszczenie zadania
	poprawne (poprawna metoda rozwiązania i wynik)	**częściowo poprawne**	**częściowo poprawne (poprawny wynik, ale brak prezentacji metody)**	**błędne**	
1	82,7% (324)	1,0% (4)	0,5% (2)	13,5% (53)	2,3% (9)
2	89,3% (350)	0,8% (3)	2,8% (11)	6,1% (24)	1,0% (4)
3	75,3% (295)	7,6% (30)	2,0% (8)	5,4% (21)	9,7% (38)
4	35,7% (140)	1,5% (6)	0,0% (0)	56,7% (222)	6,1% (24)
5	10,5% (41)	53,8% (211)	16,1% (63)	6,1% (24)	13,5% (53)
6	51,8% (203)	1,8% (7)	1,8% (7)	35,4% (139)	9,2% (36)
7	48,2% (189)	2,6% (10)	1,0% (4)	37,2% (146)	11,0% (43)
8	47,5% (186)	11,0% (43)	0,5% (2)	21,9% (86)	19,1% (75)

W nawiasach została podana liczba odpowiedzi w danej kategorii.

Źródło: opracowanie własne.

Za rozwiązanie każdego z zadań 1–4 i 6–8 badany mógł uzyskać maksymalnie po dwa punkty, a za rozwiązanie zadania 5 – trzy punkty. O liczbie punktów przyznanej za zadanie informowała pierwsza cyfra kodu wskazująca, czy zadanie jest rozwiązane poprawnie, częściowo poprawnie czy błędnie, ale niewskazująca, czy zastosowana metoda jest dostępna uczniom klas III czy nie. Szczegółowe informacje o wynikach punktowych zamieściłyśmy na rycinie 1.



Rycina 1. Rozkład wyników uzyskanych przez studentów

Źródło: opracowanie własne.

Maksymalną liczbę punktów (17 pkt) uzyskało 12 studentów (3,1%), a jeden punkt mniej (16 pkt) uzyskało 11 osób (2,8%). Jednak 6 badanych uzyskało nie więcej niż 2 pkt, przy czym 3 z nich, mimo podejmowanych prób, nie potrafiło rozwiązać w pełni poprawnie ani jednego zadania, 2 rozwiązało poprawnie jedno zadanie, a pozostałe błędnie, a jeden oddał czystą kartkę.

Mimo że zdecydowana większość rachunków została przez studentów wykonana poprawnie, w pracach pojawiały się błędy rachunkowe w zakresie czterech podstawowych działań arytmetycznych (np. $6 + 7 + 8 + 2 = 24$; $21 – 3 = 17$; $72 + 40 = 102$; $8 \times 7 = 42$, $7 \times 8 = 57$; $9 \times 6 = 52$; $72 : 9 = 7$). Czasami dało się zaobserwować brak jakiejkolwiek refleksji studenta nad poprawnością otrzymanego wyniku. Na przykład jedna z osób błędnie obliczyła, że $72 : 9 = 17{,}6$. Wynik ten nie wzbudził jej wątpliwości – w pracy nie ma żadnych prób sprawdzenia. Sporo błędów rachunkowych pojawiło się w zadaniu 8, w którym należało wykonać obliczenia zegarowe. Na przykład jeden ze studentów napisał, że po upływie 6 minut od godz. 8.54 będzie godzina 8.58, a inny, że 9.02, jeszcze inny błędnie obliczył, że po upływie 6 minut od godz. 8.48 będzie godzina 9.04.

Wielu badanych studentów, pomimo dobrych sprawności rachunkowych, ujawniło trudności z zapisem rozwiązania (zwłaszcza gdy zadanie wymagało wykonania i zapisania co najmniej dwóch działań) i brak rozumienia sensu równości. Relatywnie często pojawiały się błędne zapisy typu: 82 – 6 = 76 – 6 = 70; 21 + 13 = 34 : 2 = 17; 69 – 39 = 30 : 3 = 10. Najtrudniejsze okazało się zapisywanie obliczeń zegarowych w zadaniu 8; bardzo często pojawiały się zapisy, takie jak np.: 8.30 + 20 min = 8.40 + 6 = 8.45 + 20 min; 8.30 + 3 h 20 min = 12.50; 8.30 + 10 × 6 = 9.30; 9.24 + 20 = 9.44, $9^{24} + 20 = 9^{44}$; 8.30 + 20 min = 8.50 + 8.56; 12.03 – 60 = 11.03.

Analiza prac studentów pod kątem rozumienia przez nich czytanych tekstów zadań przebiegała dwuetapowo. Najpierw na podstawie przedstawionego rozwiązania wnioskowałyśmy o umiejętności przeczytania ze zrozumieniem tekstu zadania. Przyjęłyśmy, że student wykazał się: 1) wysokim poziomem umiejętności czytania tekstu danego zadania matematycznego ze zrozumieniem, gdy uwzględnił wszystkie ważne z punktu widzenia postawionego pytania dane, powiązał je relacjami opisanymi w treści zadania i wyraził te zależności w poprawnym modelu matematycznym; 2) średnim poziomem, gdy przeprowadził poprawne rozumowanie, ale popełnił błędy nieuwagi: uwzględnił inną wielkość liczbową, niż była podana w zadaniu lub poprzestał na podaniu jednej możliwości w zadaniu, w którym należało wskazać wszystkie możliwości; 3) niskim poziomem, gdy bezmyślnie łączył wielkości występujące w treści, wykonywał działania matematyczne, które nie odpowiadały zadanym relacjom i związkom pomiędzy danymi bądź pominął jakieś wielkości w konstrukcji modelu matematycznego. Jako przykład mogą służyć wyniki analizy zadania 8.

Przyjęłyśmy, że wysokim poziomem umiejętności czytelniczych wykazał się student, który: 1) ustalił czas rozpoczęcia pracy przez kolejnych zawodników i doliczył 20 minut potrzebne do wykonania zadania przez ostatniego zawodnika; 2) rozpisał godziny rozpoczęcia i zakończenia pracy przez 10 zawodników; 3) obliczył czas trwania 9 przerw po 6 minut między rozpoczęciem pracy przez kolejnych zawodników i doliczył 20 minut potrzebne do wykonania zadania przez ostatniego zawodnika; 4) obliczył czas trwania 10 przerw po 6 minut między rozpoczęciem pracy przez kolejnych zawodników i doliczył 14 minut potrzebne do wykonania zadania przez ostatniego zawodnika.

Średnim poziomem umiejętności wykazał się student, który zastosował poprawną metodę, ale zmienił jedną wartość liczbową, np.: 1) poprawnie ustalił czas rozpoczęcia pracy przez ostatniego zawodnika, ale doliczył inną liczbę niż 20 minut, 6 minut lub 14 minut pracy ostatniego zawodnika (np. 30 minut, 2 minuty); 2) podał, że pierwszy zawodnik zaczął pracę o innej godzinie niż 8.30 (np. o 8.00, o 8.20).

Niski poziom umiejętności czytania i interpretowania tekstu zadania 8 zaprezentował autor rozwiązania, w którym: 1) pominięto czas potrzebny na wykonanie zadania przez ostatniego zawodnika i zamiast 20 minut doliczono 6 minut; 2) poprawnie obliczono godzinę rozpoczęcia pracy ostatniego zawodnika (9.24) i zamiast 20 minut doliczono 14 minut (20 – 6 = 14), otrzymując w odpowiedzi 9.38; 3) uznano moment rozpoczęcia pracy przez ostatniego zawodnika za jej zakończenie; 4) uwzględniono wszystkie występujące w zadaniu wielkości liczbowe i połączono je działaniami, na które wskazują słowa klucze (każdy z dziesięciu zawodników po 6 minutach rozpoczyna pracę i każdy potrzebuje po 20 minut na jej wykonanie) i przedstawiono zapisy typu: $10 \times 20 + 10 \times 6 = 260$; 5) uwzględniono jedynie wielkości liczbowe zapisane za pomocą cyfr i pominięto te, które były zapisane słownie; 6) obliczono łączny czas pracy 10 zawodników, bez uwzględnienia tego, że pracują oni równocześnie (10×20) i do wyniku dodano 6 minut; 7) uwzględniono w konstrukcji modelu matematycznego jedynie informację, że każdy z 10 zawodników zaczyna swoją pracę po upływie 6 minut od rozpoczęcia pracy przez poprzedniego i zapisano mnożenie 10×6, a zatem czas rozpoczęcia wykonywania zadania przez kolejnego (jedenastego) ucznia uznano za czas rozpoczęcia pracy przez dziesiątego, a następnie doliczono 20 minut; 8) uwzględniono czas rozpoczęcia wykonywania zadania przez pierwszego ucznia, czas potrzebny na wykonanie zadania (20 minut) oraz przerwę (6 minut) i w odpowiedzi podano godzinę 8.56; 9) do godziny rozpoczęcia pracy przez pierwszego zawodnika dodano 20 minut, a do godzin rozpoczęcia kolejnych zawodników – po 14 minut. W tabeli 2 zestawiono odsetki studentów na każdym z wyróżnionych przez nas poziomach czytania tekstu tego zadania.

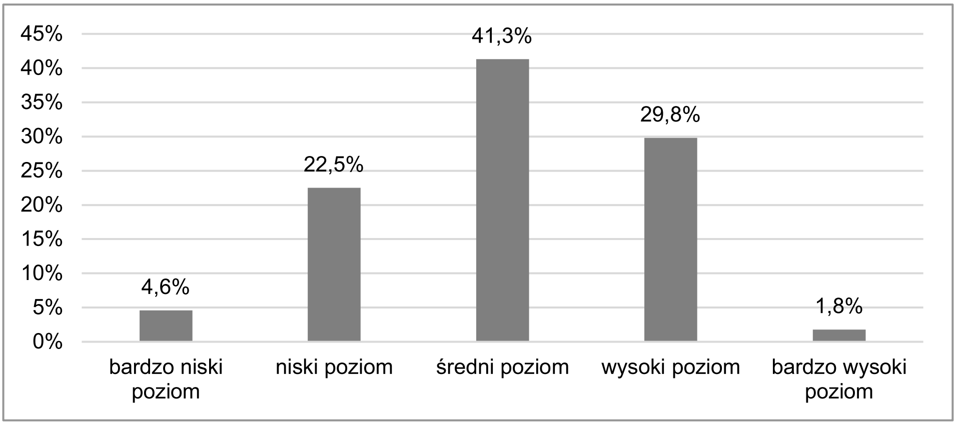
Tabela 2. Poziom umiejętności czytania ze zrozumieniem tekstu jednego z zadań matematycznych (N = 392)

Poziom umiejętności czytelniczych	**Odsetek studentów (%)**
Wysoki	47,5
Średni	11,0
Niski	21,9
Nie można stwierdzić	19,6

Źródło: opracowanie własne.

W drugim etapie dokonałyśmy pewnej agregacji wyników i przyglądałyśmy się umiejętności czytania ze zrozumieniem tekstów wszystkich zadań. Przyjęłyśmy, że badany posiada umiejętność czytania tekstów zadań matematycznych: 1) na bardzo wysokim poziomie, jeśli wykazał się wysokim poziomem umiejętności czytania tekstu we wszystkich zadaniach; 2) na wysokim poziomie, jeśli wykazał się wysokim poziomem umiejętności czytania tekstu w sześciu lub siedmiu zadaniach; 3) na średnim poziomie, jeśli wykazał się wysokim poziomem umiejętności czytania tekstu czterech lub pięciu zadaniach; 4) na niskim poziomie, jeśli wykazał się wysokim poziomem umiejętności czytania tekstu dwóch lub trzech zadań; 5) na bardzo niskim poziomie, jeśli wykazał się wysokim poziomem umiejętności czytania tekstu w co najwyżej jednym zadaniu. Szczegółowe zestawienie przedstawiono na rycinie 2.

Studenci byli poinformowani, że zadania należy rozwiązać metodami dostępnymi uczniom klas III. Takie metody zastosowało wielu badanych. Często korzystali z rysunków lub przedstawiali poprawne rozwiązania rysunkowe (tab. 3). Jednak niektórzy rozwiązywali zadania za pomocą równań z jedną lub kilkoma niewiadomymi, układów równań lub proporcji. Wśród badanych byli też tacy, którzy stosowali metody mieszane,



Rycina 2. Poziomy opanowania czytania ze zrozumieniem tekstów zadań matematycznych (N = 392)

Źródło: opracowanie własne.

np. rozpoczynali od metody dostępnej uczniowi, potem np. układali i rozwiązywali równanie. Inni postępowali odwrotnie – najpierw rozwiązywali zadanie metodami, które poznali na wyższych etapach edukacyjnych, a po rozwiązaniu zadania starali się rozwiązać zadanie metodą dostępną trzecioklasiście. Niektórzy podawali sam wynik bez prezentacji sposobu dojścia do tego wyniku. Dlatego nie zawsze byłyśmy w stanie określić, czy badani rozwiązali zadanie metodami dostępnymi dzieciom wczesnoszkolnym.

Tabela 3. Poprawność rozwiązania a korzystanie z rysunków (N = 392)

Zadanie	Rozwiązanie						Opuszczenie zadania
	poprawne bez rysunku	poprawne z rysunkiem	częściowo poprawne bez rysunku	częściowo poprawne z rysunkiem	błędne bez rysunku	błędne z rysunkiem	
1	74,7% (293)	7,9% (31)	1,5% (6)	0,0% (0)	10,0% (39)	3,6% (14)	2,3% (9)
2	69,4% (272)	20,2% (79)	3,1% (12)	0,2% (1)	4,8% (19)	1,3% (5)	1,0% (4)
3	63,8% (250)	11,5% (45)	9,4% (37)	0,3% (1)	3,8% (15)	1,5% (6)	9,7% (38)
4	10,7% (42)	25,0% (98)	0,5% (2)	1,0% (4)	34,5% (135)	22,2% (87)	6,1% (24)
5	22,7% (89)	4,1% (16)	45,2% (177)	8,4% (33)	3,8% (15)	2,3% (9)	13,5% (53)
6	8,7% (34)	43,1% (169)	2,8% (11)	0,8% (3)	6,1% (24)	29,3% (115)	9,2% (36)
7	2,3% (9)	45,9% (180)	1,0% (4)	2,6% (10)	19,9% (78)	17,3% (68)	11,0% (43)
8	41,9% (164)	5,6% (22)	10,7% (42)	0,8% (3)	20,4% (80)	1,5% (6)	19,1% (75)

W nawiasach została podana liczba odpowiedzi w danej kategorii.

Źródło: opracowanie własne.

Rozwiązania zadań były bardzo zróżnicowane pod kątem sposobu ich prezentacji. Można było wyróżnić rozwiązania: 1) eleganckie matematycznie, w których występują nie tylko przejrzyste rysunki, poprawne zapisy wskazujące kolejne kroki rozwiązania (wiadomo, co po kolei student robił i wyraźne są wszystkie etapy rozwiązania zadania), ale także słowne komentarze i wyjaśnienia; 2) zawierające tylko poprawne działania lub działania i rysunek, ujawniające sposób rozwiązywania zadania; 3) zawierające błędne zapisy, świadczące jednak o poprawnym rozumowaniu i trudnościach z zapisem oraz o braku pełnego rozumienia symboli matematycznych; 4) nieuporządkowane i jednocześnie wskazujące na zmiany strategii rozwiązania problemu; 5) chaotyczne, niedokładne, nieprecyzyjne, zawierające niedokończone zapisy, z których trudno wnioskować o sposobie myślenia osoby rozwiązującej zadanie; 6) rysunkowe; 7) zawierające jedynie wynik i sprawdzenie jego poprawności, bez prezentacji drogi dojścia do niego; 8) zawierające tylko wynik, bez prezentacji drogi dojścia do niego i jego sprawdzenia.

Wnioski z badań i dyskusja

Z przeprowadzonych badań wynika, że studenci mają dobrze opanowane algorytmy i techniki obliczeniowe. Zdecydowana większość rachunków została przez nich wykonana poprawnie, choć incydentalnie zdarzały się błędy rachunkowe w zakresie czterech podstawowych działań arytmetycznych oraz, znacznie częściej, w zakresie obliczeń zegarowych. Co więcej, u znaczącej grupy studentów nie była widoczna jakakolwiek refleksja nad poprawnością otrzymanego wyniku, nawet kiedy już na pierwszy rzut oka budził on wątpliwości.

Na podstawie badania można stwierdzić, że studenci mają spore trudności w komunikowaniu się w zakresie matematyki i o matematyce. Zrozumienie sytuacji opisanych tekstami zadań okazało się kłopotliwe dla znaczącej grupy osób. Z analizy prac oraz z późniejszych rozmów ze studentami na zajęciach można stwierdzić, że są co najmniej trzy przyczyny takiej sytuacji. Pierwsza to błędne przekonanie, kształtowane na przestrzeni lat, że w matematyce chodzi głównie o zapis formuły matematycznej, rachunki i wynik końcowy. Studenci nie są przyzwyczajeni do tego, że formalny zapis rozwiązania może (a nawet powinien) być poprzedzony manipulacjami czy sporządzeniem odpowiedniego rysunku. Co więcej, są przekonani, że rozwiązanie, w którym np. sporządzono odpowiedni rysunek i podano odpowiedź, ale nie zapisano i nie wykonano działań, nie może być uznane za poprawne. Natomiast zapisanie nawet błędnej formuły, ale z poprawnym wynikiem końcowym świadczy o poprawnym rozwiązaniu. Dlatego dążą do najszybszego zapisania „jakiegoś” działania, w którym występowałyby liczby dostrzeżone w tekście zadania. Czasami, znając wynik końcowy, starają się „dopasować” działanie do odpowiedzi. Drugiej przyczyny można upatrywać w całkowitym braku dostrzegania związków matematyki ze światem realnym, w połączeniu z negatywnym stosunkiem do matematyki. Chociaż w rzeczywistości studenci bardzo dobrze rozumieją zwroty i sytuacje typu:

„Tomek stoi za Basią w kolejce", potrafią też w różny sposób zapakować np. 82 jajka do dwóch rodzajów wytłaczanek, świadomość, że mają taki problem rozwiązać na zajęciach z edukacji matematycznej, jest dla nich paraliżująca. Niejako automatycznie uruchomione zostają blokady emocjonalne. Studenci są przekonani, że na matematyce trzeba postępować zupełnie inaczej niż w rzeczywistości i według ustalonych schematów działania. Cała ich aktywność ogranicza się do rozpoznania typu zadania i podejmowania prób dopasowania odpowiedniego algorytmu. A zatem w ich przypadku umiejętność rozwiązywania problemów opisanych w zadaniach tekstowych jest zrelatywizowana do sytuacji, w której owo rozwiązywanie problemów ma następować. Trzecia przyczyna tkwi w ogólnych umiejętnościach czytania tekstów (nie tylko matematycznych) ze zrozumieniem i rozumieniu sensu poszczególnych słów lub wyrażeń.

Równie dużo (a może nawet więcej) trudności nastręczyło studentom przekazywanie myśli matematycznej w języku matematyki i zapisywanie za pomocą formuł matematycznych prowadzonego rozumowania. W szczególności nie rozumieli oni znaczenia nawiasów i znaku równości. Często zapisywali w sposób liniowy to, co robili w pamięci (np. $69 – 39 : 3 = 30 : 3 = 10$; $28 : 2 = 14 + 8 = 22$). Rzadko reprezentowali rysunkiem opisaną sytuację lub podawali rozwiązania rysunkowe, dążąc do możliwie najszybszego zapisu formuły matematycznej. Tylko nieliczni przedstawili poprawne rozwiązania dostosowane do możliwości trzecioklasistów i jednocześnie eleganckie matematycznie.

Zgodnie z wynikami badań umiejętności studentów w zakresie rozwiązywania zadań tekstowych, które nie wykraczają poza poziom klas III szkoły podstawowej, nie są wystarczające. Podejmowane działania często ograniczały się do nieudolnych prób matematyzowania przedstawionej sytuacji z wykorzystaniem liczb lub niewiadomych, traktowania danych liczbowych liniowo, zapisywania ich w konwencji równości, bez odpowiedniej troski o dokładne zrozumienie historii opisanej treścią zadania. Brak umiejętności czytania ze zrozumieniem i analizowania tekstu zadań może być powodem nacisku na opanowanie gotowych schematów postępowania. Brak nawyku reprezentowania sytuacji rysunkiem czy też pomagania sobie działaniami na konkretach może powodować w przyszłości brak rozumienia potrzeby wykonywania tego typu czynności i położenie nacisku na zapisywanie działań.

Reasumując, prawie 1/3 badanych studentów wykazywała się wysokimi kompetencjami matematycznymi, ale umiejętności matematyczne co czwartego studenta były na niskim lub bardzo niskim poziomie. Warto przy tym zauważyć, że jak pisze Kalinowska: „każdy, kto był uczniem w szkole, zdobył również doświadczenia bycia nauczycielem, obserwując zachowania i działania kadry pedagogicznej" (2018: 51). Przekonania na temat istoty wiedzy matematycznej, opanowania treści i metod matematycznych, umiejętności projektowania różnych sposobów rozwiązania problemów matematycznych, komunikowania się w matematyce i o matematyce z różnymi grupami odbiorców, wyniesione z poprzednich etapów kształcenia, mogą się nakładać na wiedzę zdobywaną w trakcie studiów i skutecznie utrwalać utarte nawyki i przyzwyczajenia. Potwierdzono to w badaniach (Czajkowska, Bugajska-Jaszczołt 2016: 193–203). Silnie odciśnięte w umyśle doświadczenia mogą wzmacniać postawy i powodować – jak wskazuje Kalinowska – że: „praca nad »inną« wiedzą może stawać się, w ich przekonaniu, niepotrzebnym balastem, a próby rozwijania konstruktywistycznych kompetencji dydaktycznych – mało skuteczne” (2018: 51).

Literatura

An S., Kulm G., Wu Z. (2004), *The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U. S.* „Journal of Mathematics Teacher Education”, 7.

Ball D.L., Thames M.H., Phelps G. (2008), *Content knowledge for teaching*. „Journal of Teacher Education”, 59(5).

Baumert J., Kunter M., Blum W., Brunner M., Voss T., Jordan A., Klusmann U., Krauss S., Neubrand M., Tsai Y. (2010), *Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom and student progress*. „American Educational Research Journal”, 47(1).

Czajkowska M. (2016), *Kompetencje geometryczne nauczycieli matematyki*. „Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia”, 8.

Czajkowska M., Bugajska-Jaszczołt B. (2016), *Jak nauczyciele i uczniowie rozwiązują zadania matematyczne, czyli o poprawnych i niepoprawnych rozumowaniach*. „Problemy Wczesnej Edukacji”, 33(2).

Czajkowska M., Grochowalska M., Orzechowska M. (2015), *Potrzeby nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Dąbrowski M. (2013), *(Za) trudne, bo trzeba myśleć?* Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Dudel B., Głoskowska-Sołdatow M. (2020), *Kompetencje matematyczne i naukowo-techniczne w edukacji wczesnoszkolnej – studium empiryczne.* Toruń, Wydawnictwo Adam Marszałek.

Jakóbowski J. (1973), *O sprawności pracy pedagogicznej początkujących nauczycieli*. Bydgoszcz, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Nauczycielskiej.

Kalinowska A. (2018). *Matematyczne kompetencje przyszłych nauczycieli wczesnej edukacji jako potencjalne źródło realizowanej przez nich metodyki. Perspektywa konstruktywistyczna*. „Forum Oświatowe”, 30(2), https://forumoswiatowe.pl/index.php/czasopismo/article/view/579, 1.06.2022.

Karpiński M., Nowakowska A., Orzechowska M., Sosulska D., Zambrowska M. (2014), *Raport z ogólnopolskiego badania umiejętności trzecioklasistów OBUT™ 2014*. Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Krauss S., Brunner M., Kunter M., Baumert J., Blum W., Neubrand M., Jordan A. (2008), *Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers*. „Journal of Educational Psychology”, 100(3).

Krygowska Z. (1979), *Zarys dydaktyki matematyki*. Warszawa, WSiP.

Niss M. (2003), *Quantitative Literacy and Mathematical Competencies*. W: B.L. Madison, L.A. Steen (eds.), *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy, https://www.maa.org/external_archive/QL/pgs215_220.pdf, 1.06.2022.

Niss M. (2011), *The Danish KOM project and possible consequences for teacher education*. „Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática", 9(6), http://funes.uniandes.edu.co/21376/, 1.06.2022.

Różańska A. (2016), *Kompetencje matematyczne uczniów klas I–III szkoły podstawowej oraz studentów – przyszłych nauczycieli i nauczycieli pracujących*. W: I. Adamek, J. Bałachowicz (red.), *Pomiędzy dwiema edukacjami. Dziecko/uczeń wobec czasu zmiany*. Łódź, Wydawnictwo WSP.

Semadeni Z., Gruszczyk Kolczyńska E., Treliński G., Bugajska-Jaszczołt B., Czajkowska M. (2015), *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*. Kielce, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP.

Shulman L.S. (1986), *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. „Educational Researcher", 15(2).

Shulman L.S. (1987), *Knowledge and Teaching: Foundations for the new reform.* „Harvard Educational Review", 57(1).

Strykowski W. (2005), *Kompetencje współczesnego nauczyciela*. „Neodidagmata", 27/28.

Żeber-Dzikowska I., Wysocka-Kunisz M., Szydłowska A. (2016), *Kompetencje nauczyciela w kontekście kształcenia*. „Społeczeństwo. Edukacja. Język", 4.