PROBLEMY WCZESNEJ EDUKACJI / ISSUES IN EARLY EDUCATION ISSN 1734-1582
2 (33) / 2016 e-ISSN 2451-2230

Monika Czajkowska
Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie
mczajkowska@aps.edu.pl

Beata Bugajska-Jaszczołt
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach
beata@ujk.edu.pl

Jak nauczyciele i uczniowie rozwiązują zadania matematyczne, czyli o poprawnych i niepoprawnych rozumowaniach

Summary

How teachers and students solve mathematical problems, or on correct and incorrect reasoning

The teaching and learning of mathematics is done mainly by solving specially selected tasks. The most significant are those which contribute to the development of mathematical reasoning in students. In this paper, we present the results of the research carried out to check the extent to which students' and teachers' reasoning (correct and incorrect) coincide with each other. The obtained results indicate that certain incorrect strategies are so common to students and teachers that we can talk about a kind of pedagogical inheritance. Probably, some teachers teach in the same way as they were taught, unconsciously pushing their students to the path of faulty solutions.

Słowa kluczowe: edukacja matematyczna, rozumowanie, strategie rozwiązywania zadań matematycznych, kompetencje nauczycieli

Key words: maths education, reasoning, strategies of solving mathematical problems, teacher competences

Kompetencje matematyczne nauczycieli klas początkowych

Powszechnie wiadomo, że w procesie nauczania i uczenia się istotne są kompetencje nauczyciela, ale nadal otwarte jest pytanie o to, jakie umiejętności nauczyciela zajmującego się edukacją matematyczną mają największy wpływ na efektywność nauczania. Wśród naukowców nie ma bowiem w tej kwestii pełnej zgodności (Czajkowska 2013: 73). Z dotychczasowych ustaleń wynika, że między kompetencjami matematycznymi a dydaktycznymi nauczyciela istnieje silna zależność (Krauss i in. 2008: 722–723; Baumert i in. 2010: 166). Jednak, jak uważa większość badaczy, to wiedza przedmiotowa nauczyciela jest fundamentem i warunkiem koniecznym skutecznego nauczania. Nie jest możliwe, aby nauczyciel, który sam nie posiada wiadomości i umiejętności matematycznych na odpowiednim poziomie, mógł pomóc uczniom w ich zrozumieniu i opanowaniu (Ball i in. 2008: 404; Baumert i in. 2010: 163). Kompetencje matematyczne wspierają rozwój kompetencji dydaktycznych, jednak wysokie kompetencje dydaktyczne nie mogą zrównoważyć braków w kompetencjach matematycznych (Krauss i in. 2008: 722–724; Baumert i in. 2010: 166). Nauczyciele, posiadający głęboką wiedzę i umiejętności matematyczne lepiej dostrzegają powiązania między treściami i dobierają materiał nauczania pod kątem realizacji stawianych celów edukacyjnych. Natomiast deficyty w wiedzy i umiejętnościach matematycznych nauczycieli mogą hamować rozwój ich umiejętności dydaktycznych (Baumert i in. 2010: 167). Z drugiej strony posiadanie rozległej wiedzy matematycznej nie jest gwarantem, że nauczyciel potrafi prawidłowo organizować proces nauczania. Istotne jest, jak korzysta z tej wiedzy i czy rozumie jej sens. Bogactwo zabiegów dydaktycznych i sposobów wyjaśniania różnych treści matematycznych w dużym stopniu zależy od tego, jak głęboko i szeroko zna je sam nauczyciel (Hill i in. 2004: 27). To właśnie kompetencje dydaktyczne mają znaczący wpływ na osiągnięcia uczniów (Baumert i in. 2010: 166). Z kolei Davis (2011: 1506–1507) uważa, że największy wpływ na jakość nauczania mają predyspozycje do wykonywania zawodu nauczyciela matematyki i talent pedagogiczny. Jego zdaniem nauczyciele o wysokich kompetencjach dydaktycznych korzystają ze specjalistycznej wiedzy, nie zawsze dostępnej ich świadomości (*tacit knowledge*). Dzięki niej potrafią udzielać uczniom właściwego wsparcia. Umiejętnie przedstawiają treści matematyczne, stosują analogie, metafory, posługują się językiem (mówionym, symbolicznym, graficznym) dostosowanym do poziomu rozwojowego i możliwości uczniów, dobierają przykłady ukazujące praktyczne wykorzystanie matematyki.

Z powyższych rozważań wynika, że dla właściwej organizacji procesu nauczania matematyki nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej powinien być dobrze przygotowany pod względem merytorycznym (na odpowiednim poziomie znać matematykę i ją rozumieć, nie popełniać błędów rzeczowych) i dydaktycznym (umieć organizować proces nauczania zgodnie z postawionymi celami nauczania, z zasadami psychologicznymi i znajomością możliwości swoich uczniów, właściwie oceniać uczniowskie rozwiązania zadań, zwłaszcza nieschematyczne i nietypowe, przewidywać typowe błędy uczniowskie). Jednak badania kompetencyjne polskich studentów oraz czynnych nauczycieli klas 1–3 obnażyły ich braki w podstawowej wiedzy matematycznej oraz niski poziom umiejętności dydaktycznych. Polscy studenci uczestniczący w badaniu TEDS-M 2008 uzyskali znacznie niższe wyniki niż studenci z innych krajów (Czajkowska i in. 2010: 29–32; Czajkowska 2012: 66). Potrafili rozwiązać głównie zadania wymagające wiedzy odtwórczej (choć i tu napotykali pewne trudności), natomiast nie radzili sobie w zadaniach nietypowych, w których należało wyjść poza znane sobie sposoby postępowania. Studenci nie posiadali też odpowiednich umiejętności dydaktycznych, np. wielu z nich nie potrafiło wyjaśnić istoty błędu uczniowskiego lub sporządzić rysunku ułatwiającego uczniowi zrozumienie błędu (Czajkowska 2012: 61, 67). Podobne wyniki uzyskały Bugajska-Jaszczołt i Czajkowska (2011) oraz Mrożek (2015), badając umiejętności matematyczne i dydaktyczne studentów kierunków pedagogicznych. Rozpoczęcie pracy zawodowej nie zawsze likwiduje te braki. Z badań prowadzonych nad kompetencjami czynnych nauczycieli klas I–III wynika, że są oni bardzo zróżnicowani pod względem wiedzy i umiejętności matematycznych (Czajkowska i in. 2015: 11–18). Nasuwa się zatem wątpliwość, czy nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej potrafią dobrać zadania i właściwie zaprojektować metody pracy nad nimi, aby realizować cele ogólne kształcenia matematycznego.

Zadania rozwijające umiejętność prowadzenia rozumowań matematycznych

Edukacja matematyczna odbywa się głównie poprzez rozwiązywanie specjalnie dobranych zadań. Szczególne znaczenie mają takie, które służą rozwijaniu umiejętności prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych oraz korzystania z podstawowych narzędzi matematyki do rozwiązywania problemów życia codziennego i czysto matematycznych. A zatem edukacja matematyczna nie powinna koncentrować się na wyćwiczeniu algorytmów, schematów, czy rozwiązaniu konkretnego zadania. Jej celem powinno przede wszystkim być rozwijanie twórczego podchodzenia do problemów, odrzucanie nieistotnych warunków i uwzględnianie ważnych z punktu widzenia rozważanego zagadnienia, precyzyjne wyrażanie własnych myśli, argumentowanie i rozumienie argumentacji innych, analizowanie danych, wyciąganie wniosków z przesłanek (Dąbrowski 2007, 2013; Gruszczyk-Kolczyńska 2012; Klus-Stańska, Kalinowska 2004; Semadeni i in. 2015). Do zadań rozwijających umiejętność prowadzenia rozumowań matematycznych należą między innymi takie, w których sytuacja nie jest jednoznaczna i trzeba rozważyć różne możliwości, które zawierają “pułapkę”, bądź fałszywie sugerują niepoprawny schemat postępowania, albo takie, które wymagają szacowania wyników.

Problem

Prowadzone przez nas obserwacje zajęć w klasach I–III oraz opisane w literaturze wyniki badań dotyczących edukacji matematycznej na poziomie klas początkowych (Dąbrowski 2007, 2013; Gruszczyk-Kolczyńska 1997, 2012; Klus-Stańska, Kalinowska 2004; Klus-Stańska, Nowicka 2005; Semadeni i in. 2015) były przyczyną postawienia pytania o to, jakie strategie rozwiązywania zadań rozwijających umiejętność prowadzenia rozumowań preferowanych w matematyce stosują uczniowie kończący I etap edukacyjny, a jakie nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej. Analiza udostępnionych nam wytworów badanych osób pozwoliła wnioskować o hipotetycznym przebiegu prowadzonego rozumowania; oceniać nie tylko jego efektywność i poprawność, ale także wskazywać kluczowe elementy tego procesu. Znajomość obieranych i preferowanych przez uczniów sposobów postępowania dostarczyła wiedzy na temat prawdopodobnych strategii działania nauczyciela na lekcji. Interesowało nas też to, w jakim stopniu nauczyciele, nie mając narzuconej metody, wykorzystują narzędzia matematyczne niedostępne dzieciom, a w jakim stosują takie strategie, które odpowiadają poziomowi doświadczenia matematycznego uczniów klas trzecich.

Informacje o wykorzystanych badaniach

Do udzielenia odpowiedzi na te pytania zostały wykorzystane częściowe wyniki trzech badań: *Badania podstawowych umiejętności uczniów trzecich klas szkoły podstawowej* (i realizowanego w jego ramach od 2011 r. *Ogólnopolskiego Badania Umiejętności Trzecioklasistów* – OBUT)[1], *Szkoły samodzielnego myślenia* (SSM) oraz *Badania potrzeb nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego* (BPN). Za realizację pierwszego z nich odpowiadała Centralna Komisja Egzaminacyjna (w latach 2005–2012), a następnie Instytut Badań Edukacyjnych (w latach 2012–2014). Dwa pozostałe zostały przeprowadzone przez Instytut Badań Edukacyjnych w ramach projektu *Entuzjaści Edukacji*[2], odpowiednio w latach: 2011–2012 oraz 2012–2014. Wszystkie badania obejmowały duże grupy respondentów, wybrane w sposób losowy (z wyjątkiem badania OBUT, w którym udział był powszechny i dobrowolny). Ponieważ *badanie podstawowych umiejętności uczniów trzecich klas szkoły podstawowej* było przeprowadzane w maju i czerwcu, a badanie SSM we wrześniu, więc przyjęłyśmy, że uczniowie uczestniczący w obu badaniach powinni posiadać zbliżony poziom wiedzy i umiejętności. Analizy prowadziłyśmy na podstawie raportów i publikacji z tych badań (Dąbrowski 2007, 2009, 2011, 2013; Murawska, Żytko 2012; Pregler, Wiatrak 2011, 2012; Nowakowska i in. 2013; Białek i in. 2013; Czajkowska i in 2015) oraz dostępnych, dzięki IBE, wyników badań SSM i BPN. W przypadku przytaczania informacji zaczerpniętych z raportów i publikacji podajemy źródło ich pochodzenia. Jednak niektóre z przedstawionych w tym artykule wyników badań SSM i BPN nie były wcześniej nigdzie opisane, a ich interpretacje są skutkiem naszych przemyśleń i refleksji.

Ze względu na ograniczone ramy tego artykułu skupimy się jedynie na analizie rozwiązań dwóch typów zadań sprzyjających rozwojowi umiejętności prowadzenia rozumowań preferowanych w matematyce.

Analiza rozwiązań zadań wymagających dostrzegania zależności

W latach 2008, 2010 i 2013 w *badaniu podstawowych umiejętności uczniów trzecich klas szkoły podstawowej* użyto odpowiednio następujących zadań:

1. *Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?* (Dąbrowski 2009: 124; Dąbrowski 2013: 62).

[1] *Badanie podstawowych umiejętności uczniów trzecich klas szkoły podstawowej* i prowadzone w jego ramach *Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów* współfinansowane było ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego – Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet III *Wysoka jakość systemu oświaty*, Działanie 3.2 *Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych*.

[2] *Entuzjaści Edukacji* to projekt realizowany w ramach projektu systemowego *Badanie jakości i efektywności edukacji oraz instytucjonalizacja zaplecza badawczego*, finansowany ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III: *Wysoka jakość systemu oświaty*, Poddziałanie 3.1.1 *Tworzenie warunków i narzędzi do monitorowania, ewaluacji i badań systemu oświaty*.

2. *Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?* (Dąbrowski 2013: 62).
3. *Stolarz zamontował w szafie sześć pionowych przegród. Na ile części podzielił wnętrze szafy?* (Nowakowska i in. 2013: 42).

Natomiast w badaniu BPN (Czajkowska i in. 2015: 14) wystąpiło zadanie:

4. *Wstążka ma długość 20 cm. Należy pociąć ją na kawałki, z których każdy będzie miał długość 2 cm. Ile cięć należy wykonać?*

Zadania te wymagają umiejętności dostrzegania zależności – rozwiązujący musi zauważyć związek pomiędzy liczbą drzew a liczbą „odcinków drogi" (zadanie 1 i 2), liczbą przegród a liczbą części, na które szafa została podzielona (zadanie 3) lub liczbą kawałków wstążki i liczbą cięć (zadanie 4). Do ich rozwiązania nie jest konieczne posłużenie się rachunkiem – wystarczy np. odwołać się do doświadczenia życiowego, wyobrazić sobie opisaną sytuację, wykonać odpowiednie gesty ręką w powietrzu lub sporządzić rysunek i policzyć w myśli lub na rysunku liczbę drzew, części szafy, czy cięć wstążki. Należy też zauważyć, że ostatnie zadanie może mieć różne rozwiązania – przy założeniu, że wstążkę można zginać, przy odpowiednim jej złożeniu wystarczy wykonać jedno cięcie; w przeciwnym przypadku – trzeba zrobić 9 cięć. Pomimo że zaprezentowane wyżej zadania różnią się kontekstem, to jednak (przyjmując, że wstążka w zadaniu 4 nie może być składana) ich rozwiązanie wymaga stosowania podobnych podejść heurystycznych.

W toku rozwiązywania powyższych zadań niektórzy trzecioklasiści wykonywali rysunek – niekiedy konkretny, przedmiotowy – pracowicie rysując drogę i drzewka lub szafę z przegródkami, innym razem schematyczny, symboliczny (Dąbrowski 2009: 131; Dąbrowski 2013: 68; Nowakowska i in. 2013: 42). Często to, co było przedstawione na rysunku, było rozwiązaniem zadania, jednak odpowiedź nie zawsze była podana *explicite* (Nowakowska i in. 2013: 43).

Część uczniów, oprócz rysunku lub bez jego wykonywania, zapisywała odpowiednio działania typu: $13 - 1 = 12$, $12 \cdot 10 = 120$ (zadanie 1), $130 : 10 = 13$, $13 + 1 = 14$ (zadanie 2) lub $1 + 6 = 7$ (zadanie 3). Niekiedy, zwłaszcza w przypadku zadania 3, można przypuszczać, że uczniowie rozwiązywali zadanie w myśli, ale chcieli podać nie tylko końcowy wynik, lecz także zapisać formułę matematyczną. Możliwe, że jest to rezultat ustalanych przez niektórych nauczycieli reguł, zgodnie z którymi w rozwiązaniu zadania matematycznego musi być zapisane działanie matematyczne. Były jednak i takie dzieci, które podawały jedynie odpowiedź.

W zadaniu 2 rysunek sporządziło 1,8% uczniów (Dąbrowski 2013: 69), a w zadaniu 3 – nieco ponad połowa (50,3%) badanych trzecioklasistów. W zadaniu 3 spośród tych trzecioklasistów, którzy sporządzili rysunek poprawną odpowiedź podało ok. 69%, a tych, którzy go nie wykonali – ok. 26,9% (Nowakowska i in. 2013: 21). Podsumowując, zadanie 1 poprawnie rozwiązało 5,3% uczniów (Dąbrowski 2013: 63), zadanie 2 – 3% (Murawska, Wiatrak 2012: 100; Dąbrowski 2013: 63), a zadanie 3 – 45,6% (Nowakowska i in. 2013: 21).

Większość uczniów rozwiązała podane zadania błędnie lub nie podjęła próby ich rozwiązania. W zadaniu 1 aż 63,4% dzieci wykonało mnożenie 13 · 10, a 16,1% – dodawanie lub odejmowanie (Dąbrowski 2009: 130). W zadaniu 2 dzieci najczęściej dzieliły podane liczby: 130 : 10 (56,3%), rzadziej mnożyły, dodawały lub odejmowały (16,6%) (Murawska, Wiatrak 2012: 107). W zadaniu 3. błędną odpowiedź podało 44,9% trzecioklasistów, a 9,6% opuściło zadanie (Nowakowska i in. 2013: 21).

Podobne strategie stosowali nauczyciele w zadaniu 4. Tylko jedna z badanych osób zauważyła, że zginając odpowiednio wstążkę można wykonać mniej niż 9 cięć. Pozostali milcząco przyjęli, że wstążka nie może być składana. Przy tym założeniu ok. 35% nauczycieli przedstawiło poprawne rozwiązanie rysunkowe i, podobnie jak w przypadku uczniów, niektóre rysunki były konkretne, a inne – schematyczne. Poprawne obliczenia (20 : 2 = 10, 10 – 1 = 9) wykonało 22% badanych. Nieco mniej niż 1% nauczycieli wykonało rysunek i obliczenia, a ok. 8% podało tylko odpowiedź, bez żadnego uzasadnienia. Niepokojące jest to, ponad 1/4 badanych popełniła typowy, również dla dzieci błąd, wykonując jedynie dzielenie 20 : 2 = 10 i podając ten iloraz jako odpowiedź. Niektórzy nie zauważyli go nawet wtedy, gdy poproszeni o zaplanowanie i przedstawienie sposobu pracy z uczniami nad tym zadaniem, sporządzili właściwy rysunek i wyraźnie zaznaczyli na nim miejsca cięć wstążki (podobne zachowania, tzn. podanie błędnej odpowiedzi pomimo poprawnego rysunku, zostały zaobserwowane również u części uczniów w *badaniu podstawowych umiejętności uczniów trzecich klas szkoły podstawowej* i opisane w pracy (Dąbrowski 2013: 76). Byli też tacy nauczyciele, którzy po zauważeniu sprzeczności między wynikami uzyskanymi z obliczeń i z rysunku, starali się dopasować działanie do policzonej z ilustracji liczby cięć, np. jeden z badanych oznaczył kolejnymi liczbami końce odcinków symbolizujących cięcia i napisał: 18 : 2 = 9. Świadczyć to może o tym, że znał wynik, ale nie wiedział jak go uzyskać z użyciem odpowiedniej formuły matematycznej i dążył do "dopasowania" działania do wyniku. Ostatecznie, w tym zadaniu błędną odpowiedź podało 31,9% nauczycieli.

W tabeli 1. przedstawiamy procentowe zestawienie odsetków poprawnych i błędnych odpowiedzi przykładowo w zadaniach 3. i 4.

Tabela 1. Zestawienie odsetków poprawnych i błędnych odpowiedzi podanych przez uczniów w zadaniu 3 i nauczycieli w zadaniu 4

Badanie	**Odsetek poprawnych rozwiązań**		**Odsetek błędnych rozwiązań**	**Odsetek osób, które opuściły zadanie**
	zawierających rysunek	**bez rysunku**		
OBUT 2013	34,8%	10,8%	44,9%	9,6%
BPN	35,9%	29,8%	31,9%	2,4%

Źródło: Opracowanie własne na podstawie publikacji (Nowakowska i in. 2013: 21) oraz danych z badania BPN.

Z analizy uczniowskich lub nauczycielskich rozwiązań zadań wynika, że uczniowie i nauczyciele stosują podobne strategie i popełniają podobne błędy. Wielu nauczycieli przedstawiało poprawne rozwiązanie rysunkowe. Można więc przypuszczać, że w ten sposób pracują ze swoimi uczniami, kładąc nacisk na uchwycenie sensu opisanej sytuacji i prowadzone przez uczniów rozumowania, a nie na formalny zapis rozwiązania. Spora grupa nauczycieli podała poprawne rozwiązanie bez użycia rysunku. Niektórzy z nich ograniczyli się nawet do podania jedynie wyniku końcowego. Prawdopodobnie «widzieli oni w myśli» opisaną sytuację, wyrazili ją gestem ręki lub wcześniej rozwiązywali zadania izomorficzne (w sensie adekwatnego modelu matematycznego) do prezentowanych w tym artykule i znali schemat postępowania w tego typu zadaniach. Bardzo niepokojące jest natomiast to, że ok. 1/3 badanych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej nie poradziła sobie z rozwiązaniem zadania 4. Z 31,9% osób, które rozwiązały je błędnie, aż 82,3% wykonało dzielenie liczb występujących w tekście i jako odpowiedź podało liczbę 10. To może w pewnym stopniu wyjaśniać duży odsetek błędnych uczniowskich rozwiązań w tego typu zadaniach, a zwłaszcza wykonywania dzielenia w zadaniu 2.

Analiza rozwiązań zadania złożonego, wymagającego wykonania kilku kroków

W badaniach SSM i BPN wystąpiło to samo zadanie złożone: *Filiżanka z talerzykiem kosztują razem 28 zł. Filiżanka jest droższa od talerzyka o 8 zł. Ile kosztuje filiżanka? Przedstaw swoje rozumowanie.*

Tego typu zadania sprzyjają rozwojowi myślenia matematycznego, dlatego istotne jest, aby pojawiały się już na pierwszym etapie edukacyjnym. Jednak wymagają od nauczyciela zastosowania przemyślanego zestawu środków dydaktycznych i odpowiedniej metodyki pracy nad nimi.

Powyższe zadanie rozwiązywało 1836 czwartoklasistów (Białek i in. 2013: 17) i 254 nauczycieli klas I–III. Można je rozwiązać na kilka sposobów, które przedstawiamy poniżej (Białek i in. 2013: 94):

Sposób 1. Wykonujemy kolejno działania: 28 – 8 = 20 (podwojona cena talerzyka), 20 : 2 = 10 (cena jednego talerzyka), 10 + 8 = 18 (cena filiżanki).

Sposób 2. Wykonujemy kolejno działania: 28 + 8 = 36 (podwojona cena filiżanki), 36 : 2 = 18 (cena filiżanki).

Sposób 3. Wykonanie dzielenia: 28 : 2 = 14 i dodanie do wyniku połowy różnicy (4 zł).

Sposób 4. Zastosowanie metody prób i poprawek.

Sposób 5. Ułożenie równania (np. $x + x – 8 = 28$, gdzie x – cena filiżanki) i rozwiązanie go.

Sposób 6. Ułożenie układu równań i rozwiązanie go.

Uczniowie musieli wypracować własną strategię rozwiązania tego zadania, natomiast nauczyciele wykazać się umiejętnością modelowania matematycznego. Nauczyciele, w przeciwieństwie do dzieci, zostali zapoznani z metodami rozwiązywania równań i układów równań liniowych oraz możliwością ich wykorzystania do rozwiązywania zadań z kontekstem pozamatematycznym. Częstość stosowania wymienionych sposobów rozwiązywania zadań przez uczniów i nauczycieli, którzy podali prawidłowe rozwiązanie, podano w tabeli 2.

Tabela 2. Częstość stosowania wymienionych sposobów rozwiązywania zadań przez uczniów i nauczycieli, którzy podali prawidłowe rozwiązanie (w nawiasach podano odsetek badanych, gdy podstawą obliczeń są wszyscy badani uczniowie lub nauczyciele)

	SSM (uczniowie)		**BPN (nauczyciele)**	
Sposób 1.	56,4%	(11,0%)	61,6%	(44,9%)
Sposób 2.	1,1%	(0,2%)	0,0%	(0,0%)
Sposób 3.	11,1%	(2,1%)	3,8%	(2,8%)
Sposób 4.	31,4%	(6,1%)	2,7%	(2,0%)
Sposób 5.	0,0%	(0,0%)	22,7%	(16,5%)
Sposób 6.	0,0%	(0,0%)	8,6%	(6,3%)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie publikacji (Białek i in. 2013: 95) oraz danych z badania BPN.

Zarówno przez uczniów jak i nauczycieli, którzy z powodzeniem rozwiązali zadanie, najchętniej wybieranym był sposób 1. Uczniowie relatywnie często wybierali też sposób 4. Natomiast nauczyciele, co jest zupełnie naturalne, wyposażeni w odpowiednie narzędzia matematyczne (równania lub układy równań) znacznie częściej korzystali z nich, niż z metody prób i poprawek.

Na uwagę zasługują też zaskakujące różnice w odsetkach obieralności sposobów 1 i 2. Pomimo, że w obu przypadkach podejście do rozwiązania jest podobne (w pierwszym od sumy cen odejmujemy różnicę, aby otrzymać podwojoną cenę tańszego przedmiotu, w drugim – dodajemy różnicę, aby otrzymać podwojoną cenę droższego przedmiotu), a ponadto rozwiązanie sposobem 1 wymaga wykonania trzech kroków, a sposobem 2 – tylko dwóch, ponad połowa uczniów i nauczycieli, którzy poprawnie rozwiązali to zadanie wybrała sposób 1, a tylko nieliczni uczniowie sposób 2.

Szczegółowe informacje na temat kategorii rozwiązania zadania zamieszczono w tabeli 3.

Tabela 3. Kategorie rozwiązania zadania przez uczniów i nauczycieli

	SSM (uczniowie)	**BPN (nauczyciele)**
Rozwiązanie poprawne	19,5%	72,8%
Zastosowanie poprawnej metody, jednak rozwiązanie zawiera usterki (m.in. błędy rachunkowe, błędy w zapisie lub niedokończenie rozwiązania)	1,2%	5,1%
Podanie jedynie poprawnego wyniku	3,2%	4,7%
Rozwiązanie błędne (zastosowanie błędnej metody)	75,2%	14,2%
Opuszczenie zadania	0,9%	3,1%

Źródło: Opracowanie własne na podstawie publikacji (Białek i in. 2013: 95) oraz danych z badania BPN.

Poprawne rozwiązanie tego zadania podał co piąty uczeń oraz prawie trzech z czterech nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej. Około 0,2% uczniów i 1,2% nauczycieli zastosowało poprawną metodę, lecz popełniło błędy rachunkowe. Podobnie niewielkie są odsetki osób (odpowiednio 1% i 0,4%), które przedstawiły rozwiązania wskazujące na poprawne rozumowanie, jednak w zapisie popełniły błędy typu: 28 – 8 = 20 : 2 = 10 + 8 = 18. Około 3,5% nauczycieli wybrało poprawną metodę, ale nie dokończyło rozwiązywania zadania.

Najczęstszym błędem popełnionym w obu badanych grupach było mechaniczne odejmowanie liczb występujących w tekście zadania: 28 – 8 = 20. Popełniło go aż 34,9% uczniów i 8,1% nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej.

Nauczyciele zostali też poproszeni o zaplanowanie metodyki pracy nad tym zadaniem z uczniami klasy III. Około 16% badanych zaproponowało poszukiwanie rozwiązania z użyciem konkretnych przedmiotów do manipulacji, przy czym 41% z nich (co stanowi 6% wszystkich badanych) położyło jeszcze nacisk na samodzielną pracę ucznia. Jednak co trzeci nauczyciel w przedstawionym planie pracy nie uwzględnił ani manipulacji na konkretach, ani sporządzenia rysunku, ani też nie dążył do tego, aby uczeń w miarę samodzielnie rozwiązał to zadanie.

Łatwość przedstawionego powyżej zadania jest równa 22% w przypadku uczniów (Białek i in. 2013: 97) i 77% w przypadku nauczycieli (Czajkowska i in. 2015: 13). Jego niska rozwiązywalność w przypadku uczniów może być efektem pomijania tego typu zadań w nauczaniu, bądź niewłaściwie zaprojektowanej metodyki pracy nad nimi. Uczniowie wielokrotnie nie rozumieją proponowanych przez nauczyciela sposobów rozwiązywania zadań, ponieważ są one prowadzone na zbyt wysokim poziomie abstrakcji i ogólności. Trudności uczniów w rozumieniu pojawiają się zwłaszcza wtedy, gdy formalny zapis rozwiązania nie jest poprzedzony manipulacjami, czy sporządzeniem odpowiedniego rysunku. Brak właściwych doświadczeń wyniesionych ze szkoły w radzeniu sobie z tego typu problemami powoduje, że dzieci postawione przed koniecznością rozwiązania analogicznego zadania, stają się bezradne. Podejmują przypadkowe próby uchwycenia struktury problemu, starając się zapisać jakąś formułę matematyczną z użyciem liczb dostrzeżonych w tekście zadania.

Podsumowanie

W tradycyjnym podejściu do nauczania dominował pogląd, że im krócej uczeń dochodzi do opanowania końcowej umiejętności, tym nauczanie jest efektywniejsze. Współczesna dydaktyka kładzie nacisk na rozwój twórczego podchodzenia do problemów i tworzenia strategii ich rozwiązywania (Klus-Stańska, Nowicka 2005). Jednak pomimo deklaracji o zgodzie na samodzielną twórczość uczniowską, nauczyciele w praktyce tak kierują pracą swoich uczniów, aby możliwie najkrótszą drogą doprowadzić ich do celu (Dąbrowski 2013: 252–256). Możliwe, że preferują taki sposób pracy z dziećmi lub nie potrafią tego robić inaczej.

Analiza uczniowskich i nauczycielskich rozwiązań zadań pokazała, że stosowane przez nich strategie były podobne. Widoczne były wyraźne związki między rozumowaniami prowadzonymi przez uczniów i przez nauczycieli. Nie jest to dziwne, ani niepokojące, o ile są one poprawne. Jednak pewne typowe błędy popełniali zarówno uczniowie jak i nauczyciele, co skłania do refleksji. O ile uczniowie mają prawo wpadać w "pułapki" i popełniane przez nich błędy są naturalnym elementem procesu uczenia się, to w przypadku nauczycieli taka sytuacja nie może mieć miejsca. Nauczyciele, którzy sami popełniają typowe błędy, mogą bezwiednie uczyć dzieci wadliwych rozwiązań. Badania pokazały, że niepoprawne strategie były na tyle wspólne dla uczniów i nauczycieli, że można mówić o swoistym dziedziczeniu pedagogicznym. Prawdopodobnie niektórzy nauczyciele uczyli tak, jak sami kiedyś byli uczeni.

Literatura

Ball D.L., Thames M.H., Phelps G. (2008). *Content knowledge for teaching*. "Journal of Teacher Education", *59*(5), 389–407.

Baumert J., Kunter M., Blum W., Brunner M., Voss T., Jordan A., Klusmann U., Krauss S., Neubrand M. i Tsai, Y. (2010). *Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom and student progress.* "American Educational Research Journal", 47(1), 133–180.

Białek K. i in. (2013), *Raport z badania. Szkoła samodzielnego myślenia*. Warszawa, IBE.

Bugajska – Jaszczołt B., M. Czajkowska, M. (2011), *Kompetencje matematyczne przyszłych nauczycieli klas początkowych (w świetle wyników badań).* W: J. Szempruch, E. Zyzik, M. Parlak (red.), *Nauczyciel i uczeń w przestrzeni edukacyjnej*. Kraków, Wydawnictwo LIBRON.

Czajkowska M., Jasińska A., Sitek M. (2010), *Kształcenie nauczycieli w Polsce. Wyniki międzynarodowego badania TEDS-M 2008.* Warszawa, Instytut Filozofii i Socjologii PAN. http://www.ifispan.waw.pl/pliki/raport_z_badania_teds-m.pdf, 30.09.2011.

Czajkowska M. (2012), *Umiejętności matematyczne przyszłych polskich nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej w świetle wyników badania TEDS*. „Problemy wczesnej edukacji". Nr 1 (16).

Czajkowska M. (2013). *Pomiar kompetencji nauczycieli matematyki*. „Edukacja" nr 1/2013.

Czajkowska M., Grochowalska M., Orzechowska M. (2015), *Potrzeby nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego.* Warszawa, IBE.

Davis B. (2011), *Mathematics teachers' subtle, complex disciplinary knowledge.* Education forum. www.sciencemag.org, 28.12.2011.

Dąbrowski M. (2007), *Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*. Warszawa, CKE.

Dąbrowski M. (red.) (2009), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa, CKE.

Dąbrowski M. (red.). (2011), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych*. Warszawa, CKE.

Dąbrowski M. (2013), *(Za) trudne, bo trzeba myśleć? O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia*. Warszawa, IBE.

Gruszczyk-Kolczyńska E. (1997), *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, Warszawa, WSiP.

Gruszczyk-Kolczyńska E. (red.) (2012), *O dzieciach uzdolnionych matematycznie. Książka dla rodziców i nauczycieli*. Warszawa, Nowa Era.

Hill, H.C., Schilling, S.G., Ball, D.L. (2004), *Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching.* "The Elementary School Journal", 105(1).

Klus-Stańska D., Kalinowska A. (2004), *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*. Warszawa, Wyd. Akadem. Żak.

Krauss S., Brunner M., Kunter M., Baumert J., Blum W., Neubrand M. i Jordan A. (2008), *Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers*. “Journal of Educational Psychology”, 100(3).

Klus-Stańska D., Nowicka M. (2005), *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa, WSiP.

Mrożek E. (2015), *Badanie uczniów i studentów pedagogiki*. „Matematyka w Szkole” Nr 5 (77)/2015.

Murawska B., Żytko M. (red.) (2012), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Uczeń, dom, szkoła. Raport z badań*. Warszawa, IBE.

Nowakowska A., Sosulska D., Sułowska A., Zambrowska M. (2013). *Umiejętności matematyczne trzecioklasistów.* W: A. Pregler (red.). *Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów. Raport z badania OBUT 2013*. Warszawa, IBE.

Pregler A., Wiatrak E. (red.) (2011), *Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów. Raport z badania OBUT 2011*. Warszawa, CKE.

Pregler A., Wiatrak E. (red.) (2012), *Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów. Raport z badania OBUT 2012*. Warszawa, CKE.

Semadeni Z., Gruszczyk-Kolczyńska E., Treliński G., Bugajska-Jaszczołt B., Czajkowska M. (2015). *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*. Kielce, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP.